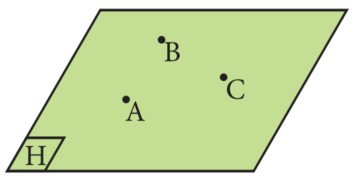
EJERCICIOS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO

1. Postulado fundamental

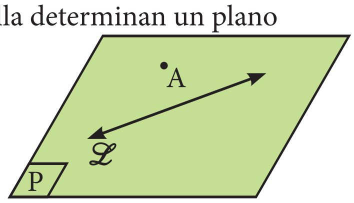
Tres puntos no colineales determinan un plano al cual pertenecen.



Si A, B y C son puntos no colineales entonces, A,B y C determinan el plano H.

A. Teoremas importantes

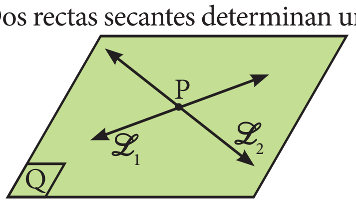
1. Una recta y un punto que no pertecen a ella determinan un plano



Si: $A \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

A y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ determinan el plano P.

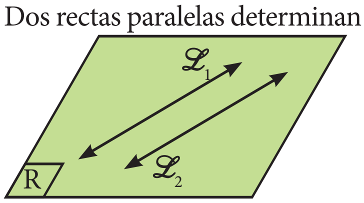
2. Dos rectas secantes determinan un plano.



$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2 = \{P\}$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ determinan el plano Q.

3. Dos rectas paralelas determinan un plano.

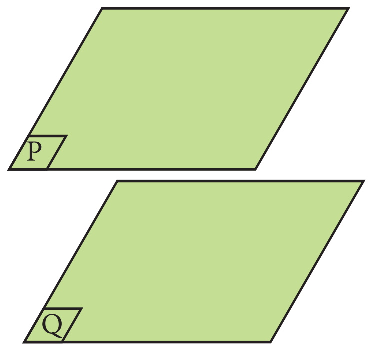


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1 // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_1$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}_2$ determinan el plano R.

B. Posiciones relativas entre dos planos

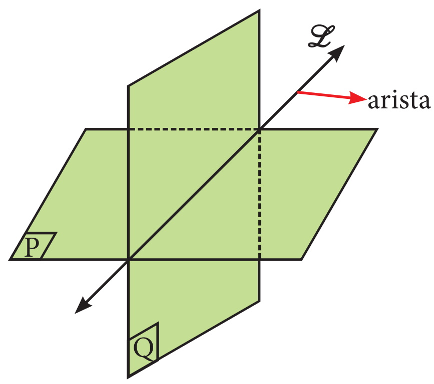
A. Planos paralelos



Si: 6P//6Q

⇒6P∩6Q = ∅

B. Planos secantes

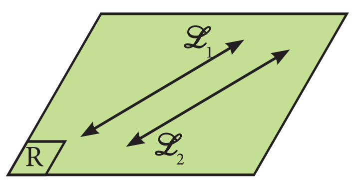


Si: 6P∩6Q = $\{\overleftrightarrow{\mathscr{L}}\}$

C. Posiciones relativas entre dos rectas

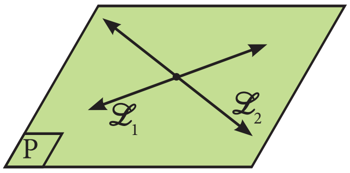
A. Rectas paralelas

Dos rectas paralelas siempre son coplanares.

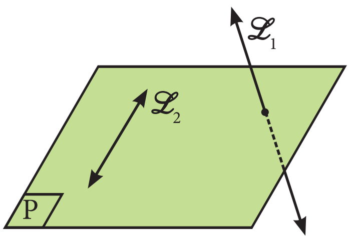


B. Rectas secantes

Dos rectas secantes siempre son coplanares porque determinan un plano.

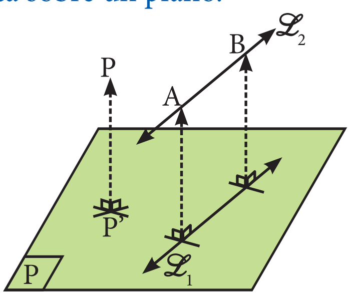


C. Rectas alabeadas



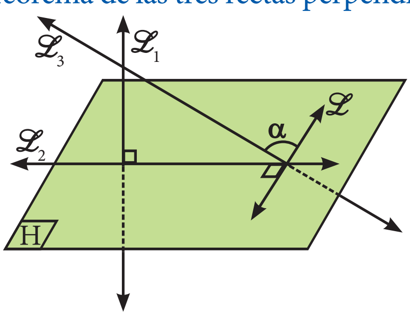
Dos rectas que no son paralelas ni secantes

D. Proyección ortogonal de un punto y una recta sobre un plano.



- P' es proyección ortogonal de P sobre el plano H.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es la proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ sobre el plano H.

E. Teorema de las tres rectas perpendiculares



Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ ⊥6H

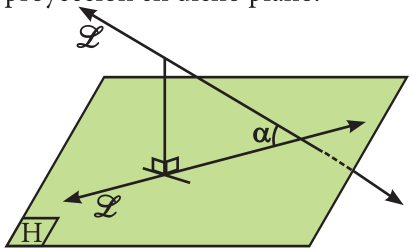
$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ ($\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ 6⊂H)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

$\therefore \alpha = 90°$

F. Ángulo entre una recta y un plano

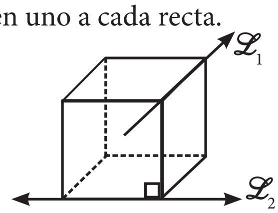
El ángulo entre una recta y un plano se mide con el ángulo que determina la recta con su proyección en dicho plano.



θ es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y el plano H.

G. Distancia entre dos rectas alabeadas

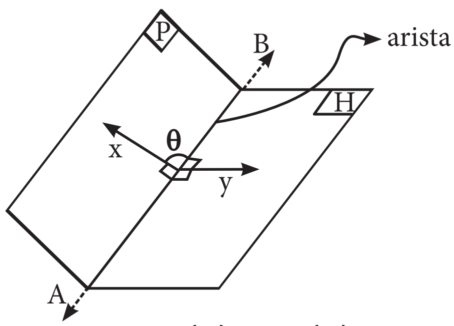
Es la longitud del segmento perpendicular a las dos rectas alabeadas, cuyos extremos pertenecen uno a cada recta.



2. Ángulo diedro y ángulo poliedro

A. Ángulo diedro

Es la figura geométrica formada por dos semiplanos que tienen en común su recta de origen, denominada arista.



Ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$ y (H – $\overleftrightarrow{AB}$ – P)

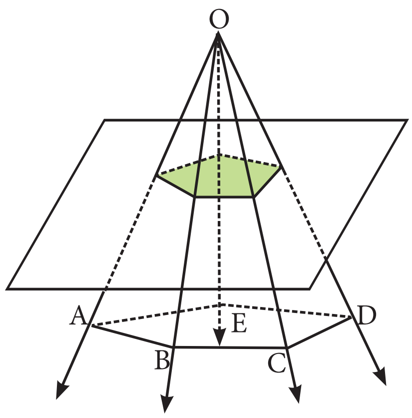
θ: medida del ángulo diedro

- Planos perpendiculares

  Dos planos son perpendiculares cuando determinan un diedro que mide 90°.

B. Ángulo poliedro

Es la figura que se genera cuando un rayo es desplazado por los lados de un polígono, manteniendo fijo su origen y exterior al plano que contiene al polígono.



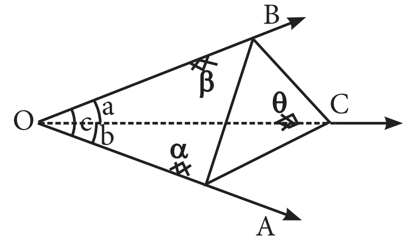
Ángulo poliedro
O – ABCDE

- Propiedad
  En todo ángulo poliedro la suma de las medida de las caras es:

$$0° < S_{m(caras)} < 360°$$

C. Ángulo triedro

Es aquel ángulo poliedro de tres caras.



Ángulo triedro: O–ABC
Triedro: O–ABC
Medidas de las caras: a, b, c
Medidas de los diedros **α, θ, β**
Propiedades:

$$0° < a + b + c < 360°$$

$$a - c < b < a + c$$

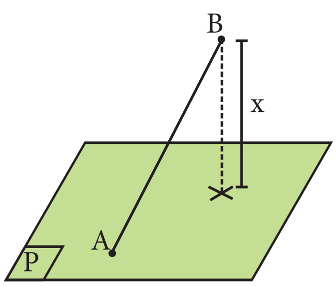
$$180° < \alpha + \beta + \theta < 540°$$

$$\text{Si } a > c \Rightarrow \alpha > \theta$$

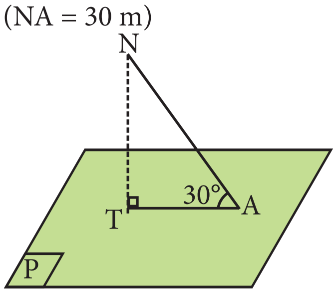
Trabajando en clase

Integral

1. Calcula «x» si AB = 34 y su proyección sobre el plano Q mide 30 m.



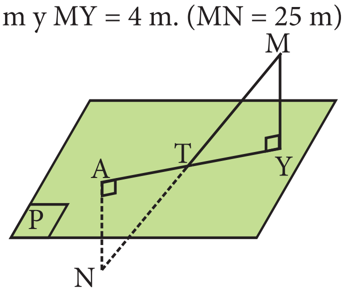
2. Del gráfico, calcula la proyección de NA sobre el plano P. (NA = 30 m)



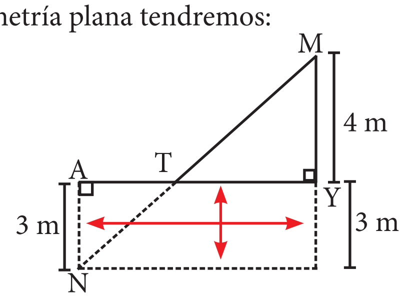
3. ¿Cuántos planos como máximo se pueden formar con 12 puntos no colineales?

Católica

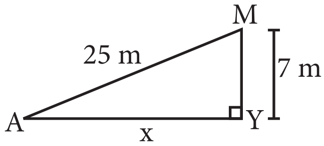
4. Calcula la proyección de MN sobre el plano P si AN = 3 m y MY = 4 m. (MN = 25 m).



Resolución:
Si nos olvidamos del plano y los tomamos como geometría plana tendremos:

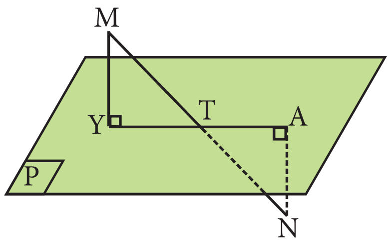


Trasladamos la figura para formar un triángulo rectángulo.

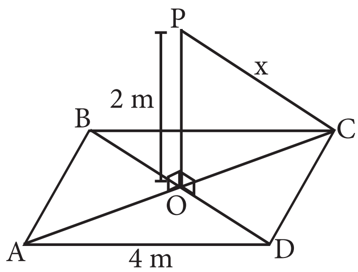


$\therefore$ x = 24 m

5. Calcula la proyección de MN sobre el plano Q si MY = 3 m, AN = 2 m y MN = 13 m.



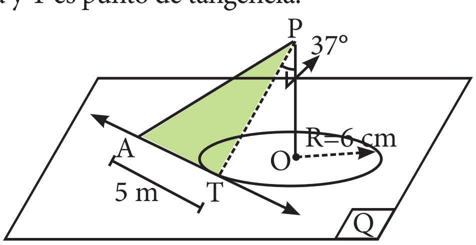
6. Del gráfico ABCD es un cuadrado y $\overline{OP}$ es perpendicular al plano. Calcula «x».



7. En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, desde B se traza una perpendicular al plano, $\overline{PB}$. Si se toma un punto F de la circunferencia, se forma m∠FPA = 57°, calcula m∠PAF.

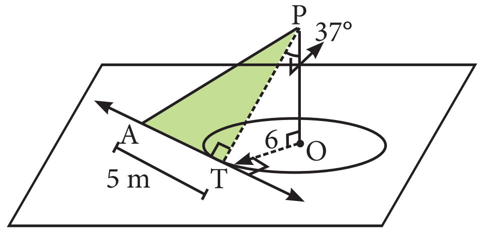
UNMSM

8. Calcula el área de la región sombreada si OP es perpendicular al plano Q, O es centro de la circunferencia y T es punto de tangencia.



Resolución:

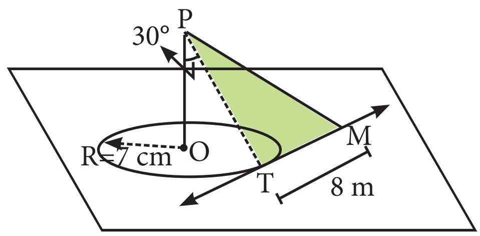
Trazamos el radio a la tangente y aplicamos el teorema de las 3 perpendiculares del ◺ notable 37°



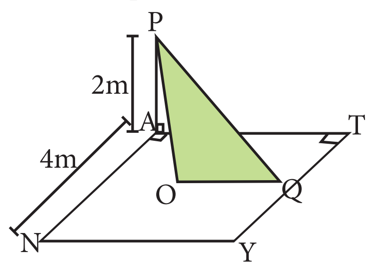
TP=20 m

$A_{\Delta} = \dfrac{10.5}{2} = 25\ m^2$

9. Calcula el área de la región sombreada si $\overline{OP}$ es perpendicular al plano, O es centro de la circunferencia y T es punto de tangencia.



10. ¿Cuántos planos se pueden formar, como máximo con 12 rectas paralelas?



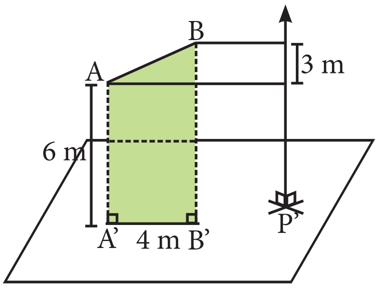
11. Si NATY es un cuadrado, O es el centro y Q punto medio de $\overline{YT}$, calcula el área de la región sombreada.

UNI

12. Las proyecciones de un segmento de recta $\overline{AB}$ sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano son 3 m y 4 m respectivamente. Determina el área de la región encerrada por las rectas perpendiculares al plano trazadas desde A y B; el segmento $\overline{AB}$ y la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano, si la menor distancia que hay del segmento al plano es 7 m.

Resolución:

Graficamos adecuadamente:



Observamos que tenemos un trapecio rectángulo:

$$A_{som} = \left(\frac{10+7}{2}\right) - 4 = 34 \text{ m}^2$$

13. Las proyecciones de un segmento de recta $\overline{AB}$ sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano son 8 m y 15 m respectivamente. Determina el área de la región encerrada por las rectas perpendiculares al plano trazadas desde A y B, el segmento $\overline{AB}$ y la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano si la menor distancia que hay del segmento al plano es 10 m.

14. Se tiene un vértice D que está fuera de un plano cuya forma es un triángulo rectángulo ABC (Recto en B). Si BD es perpendicular al plano, AD = 5 m, BC = 12 m y BD = $\dfrac{60}{13}$ m, calcula la medida del diedro $\overline{AC}$.