Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA CUARTO

EJERCICIOS DE DESIGUALDADES E INTERVALOS

Desigualdad

Es aquella comparación que se establece entre dos números reales, mediante símbolos: $<, >, \leq, \geq$.

Si $a \wedge b \in \mathbb{R}$, se tiene:

$a > b$: «a es mayor que b»

$a < b$: «a es menor que b»

$a \geq b$: «a es mayor o igual que b»

$a \leq b$: «a es menor o igual que b»

Ley de tricotomía

Dados dos números reales «a» y «b», entre ellos solo se puede establecer una de las siguientes relaciones:

$a > b$
$a = b$
$a < b$

Definiciones

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

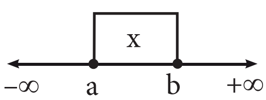
- $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$
- $a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c$
- Si $a < b \rightarrow a + c < b + c$
- Si $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- Si $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
- Si $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc$

Intervalo

Es un subconjunto de los números reales; es decir, aquel que está formado de infinitos elementos que representan a todos los números reales comprendidos entre dos extremos, llamados extremo superior y extremo inferior.

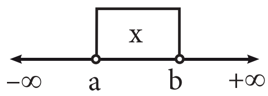
Tipos de intervalo

- Intervalo cerrado:



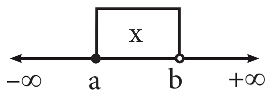
$$\boxed{\Rightarrow x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b}$$

- Intervalo abierto:



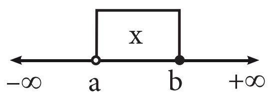
$$\boxed{\Rightarrow x \in]a; b[\Leftrightarrow a < x < b}$$

- Intervalo semiabierto o semicerrado:
  - ❖



$$\boxed{\Rightarrow x \in [a; b[\Leftrightarrow a \leq x < b}$$

  - ❖



$$\boxed{\Rightarrow x \in]a; b] \Leftrightarrow a < x \leq b}$$

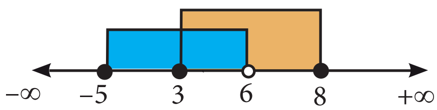
Teoremas

- $\forall\, a \in \mathbb{R};\ a^2 \geq 0$
- Si $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$
- Si $a < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < 0$
- $a + \dfrac{1}{a} \geq 2;\ \forall\, a \in \mathbb{R}^+$
- $a + \dfrac{1}{a} \leq -2;\ \forall\, a \in \mathbb{R}^-$
- $a^2 + b^2 \geq 2ab;\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
- Media aritmética $\geq$ media geométrica

Operación con intervalos

a) Unión de intervalos:

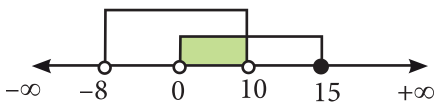
Si $A = [3; 8] \wedge B = [-5; 6[$



$\Rightarrow A \cup B = [-5; 8]$

b) Intersección de intervalos:

Si $A =]-8; 10[\ ; B =]0; 15]$

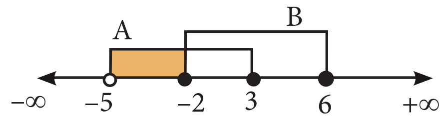


$\Rightarrow A \cap B =]0\ ; 10[$

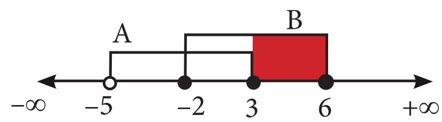
c) Diferencia de intervalos:

Si $A =]-5; 3] \wedge B = [-2; 6]$

$\Rightarrow A - B =]-5; -2[$



$\Rightarrow B - A =]3; 6]$



Trabajando en clase

Integral

1. Si $A = [-5; 8]$
$B = [-10; 5[$
determina: $A \cap B$; $A - B$

2. Si: $A = \langle -\infty; 3[$
$B = [0; +\infty\rangle$
determina: $A \cup B \wedge B - A$

3. Si $-5 \leq x < 3$
¿a qué intervalo pertenece $-2x + 4$?
Da como respuesta la suma del mayor y menor valor entero.

PUCP

4. Si $-5 \leq x < 7$,
¿a qué intervalo pertenece $\frac{2}{x+7}$?

Resolución:

$\Rightarrow (-5 \leq x < 7) + 7$

$(2 \leq x + 7 < 14)^{-1}$

$\left(\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x+7} \rangle \frac{1}{14}\right) \cdot 2$

$1 \geq \frac{2}{x+7} \rangle \frac{1}{7}$

$\Rightarrow \frac{2}{x+7} \in \left\langle \frac{1}{7}\ ; 1\right]$

5. Si $-10 < x \leq 3$,
¿a qué intervalo pertenece: $\frac{3}{x+13}$?

6. Indica a qué intervalo pertenece:
$f(x) = \frac{4}{x^2+4}$.

PUCP 2011-I

7. Si $x \in \langle -4\ ; 2]$, además $x^2 - 2 \in [a; b\rangle$,
calcula: $a + b$

UNMSM

8. Indica el mayor valor entero que cumple con:

$$\frac{x+1}{2} - 3 \leq \frac{x+2}{3} - 4 \leq \frac{1-x}{4} + 8$$

Resolución:

II

$$\frac{x+1}{2} - 3 \leq \frac{x+2}{3} - 4 \leq \frac{1-x}{4} + 8$$

I

Se resuelve por partes:

I. $\left(\frac{x+1}{2}-\frac{3}{1}\leq\frac{x+2}{3}-\frac{4}{1}\right)\cdot(6)$ MCM(2; 3)

$3x+3-18\leq 2x+4-24$
$x-15\leq -20$
$x\leq -5$

II. $\left(\frac{x+2}{3}-4\leq\frac{1-x}{4}+8\right)\cdot(12)$ MCM(3; 4)

$4x+8-48\leq 3-3x+96$
$7x-40\leq 99$
$\Rightarrow 7x-40\leq 3x+99$
$10x\leq 139$
$x\leq\frac{139}{10}$

Entonces, tenemos:
I. $x\leq -5$
II. $x\leq\frac{139}{10}$

El mayor valor enero es –5.

9. Indica el mayor valor entero que cumple con:

$$\frac{x+2}{2}-5\leq\frac{x-1}{3}-2\leq\frac{x+2}{4}+5$$

10. Si $x\in\langle 0; 7\rangle$, entonces encuentra la suma de los extremos del intervalo al que pertenece:

UNMSM 2010 – II

$$y=\frac{5-x}{x+3}$$

11. Si «a» y «b» son dos números reales, de modo que $a^2+b^2=3$, ¿cuál es el menor valor que puede tomar «a + b»?

UNMSM 2008 – II

UNI

12. Si $x\in\langle -4; 6]$, determina a qué intervalo pertenece $-x^2+8x-6$.

Resolución:
Completando cuadrado:
$-x^2+8x-6=-(x^2-8x+6)$
$=-(x^2-8x+16+6-16)$
$=-((x-4)^2-10)$
$=-(x\times 4)^2+10$

Como $x\in\langle -4; 6]$
$(-4<x\leq 6)-4$
$(-8<x-4\leq 2)^2$
$(0\leq(x-4)^2<64)\cdot(-1)$
$(0\geq-(x-4)^2<64)\cdot(-1)$
$(0\geq-(x-4)^2>-64)+10$
$10\geq-(x-4)^2+10>-54$

$\therefore -x^2+8x-6\in\langle -54; 10]$

13. Si $x\in[-1; 4]$, determina a qué intervalo pertenece:

$$-x^2+2x-4$$

14. Si $a\in\mathbb{R}^+$, determina el menor valor que puede tomar la expresión:

$$A=a+\frac{11}{a}$$