



# Materiales Educativos GRATIS

## ALGEBRA

## TERCERO

# EJERCICIOS DE CRITERIOS DE FACTORIZACIÓN

### FACTORIZACIÓN

Es transformar un polinomio en el producto indicado de factores primos.

En la multiplicación algebraica se tiene:

$$\underbrace{(x + 3)}_{\text{factores}} \underbrace{(x^2 - 3x + 9)}_{\text{producto}} \equiv x^3 + 27$$

El problema que nos planteamos ahora es el siguiente: dado el polinomio producto, debemos hallar los factores que lo originan. Si conseguimos los factores, se habrá factorizado el polinomio.

Así:

$$x^3 + 27 \equiv (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

### Factor primo

Es aquel polinomio que no admite descomposición.

#### Ejemplos:

- $x$  : 1;  $x$
- $x + 1$  : 1;  $x + 1$
- $x - 2$  : 1;  $x - 2$

### Conteo de factores primos

El número de factores primos de un polinomio (factorizado) se obtiene contando los factores primos que se encuentran como base de una potencia y que contienen la variable.

#### Ejemplos:

- $P(x) = 4(x - 2)^2(x + 3)^2(x + y)^5$   
Tiene 3 factores primos
- $Q(x) = 3x(x - 3)^2(x^2 + 2)^2(x^2 + y)^2$   
Tiene 4 factores primos:
  - ❖ 2 lineales:  $x$ ;  $x - 3$
  - ❖ 2 cuadráticas:  $x^2 + 2$ ;  $x^2 + y$

### Criterios para factorizar

Existen diversos criterios para factorizar polinomios, entre ellos tenemos:

#### 1. Factor común y agrupación

Se aplica en polinomios donde todos sus términos tienen una o más variables y/o constantes comunes.

En caso de no haber algún factor común, se agrupará convenientemente tratando de que aparezca algún factor común.

#### Ejemplos:

Factoriza:

$$5x^{10}y^5 - 10x^7y^8 - 25x^{11}y^9 = 5x^7y^5(x^3 - 2y^3 - 5x^4y^4)$$

Factoriza:

$$(a + b + c)m^2 + (a + b + c)n^2 + (a + b + c)p^2 = (a + b + c)(m^2 + n^2 + p^2)$$

Factoriza:

$$\underbrace{a^2x^2 + b^2y^2}_{\text{}} + \underbrace{a^2y^2 + b^2x^2}_{\text{}}$$

Agrupando en forma conveniente:

$$a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2)$$

Sacando el factor común:

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$$

#### 2. Criterio de las identidades

Consiste en aplicar los productos notables en forma inversa.

##### A. Trinomio cuadrado perfecto

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & & y \\ 2(x)(y) = 2xy \end{array}$$

Factoriza:

$$\underbrace{x^2 + 6xy + 9y^2}_{\text{}} = (x + 3y)^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ x & & 3y \\ 2(x)(3y) = 6xy \end{array}$$

##### B. Diferencia de cuadrados

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Factoriza:  $x^4 - 1$

Resolución:

Dando la forma de diferencia de cuadrados:

$$(x^2)^2 - (1)^2 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

Podemos seguir descomponiendo:

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

### C. Suma y diferencia de cubos

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

Factoriza:  $64a^6 - b^6$

Por diferencia de cuadrados

$$(8a^3 + b^3)(8a^3 - b^3)$$

Ahora factorizamos por suma y diferencia de cubos:

$$(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$$

### 3. Criterio de aspa simple

Se aplica para factorizar polinomios de la siguiente forma:

$$P(x) = Ax^{2n} + Bx^n + C \text{ o } P(x,y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$
$$\{m, n\} \subset \mathbb{N}$$

Ejemplos:

Factoriza:  $P(x) = x^2 + 8x + 15$

$$\begin{array}{c} x \quad \quad 5 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \quad \quad 3 \\ \hline +5x \quad +3x \\ 8x \end{array}$$

Luego:

Se toman los factores en forma horizontal.

$$P(x) = (x + 5)(x + 3)$$

Factoriza:

$$P(x) = 10x^2 - 13x - 3, \text{ descomponiendo los extremos}$$

$$\begin{array}{c} 5x \quad \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2x \quad \quad -3 \\ \hline 2x \quad -15x \\ -13x \end{array}$$

Luego:

$$P(x) = (5x + 1)(2x - 3)$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Determina el número de factores primos en el polinomio:

❖  $P(x, y) = 51a^3x^5y^3(x - 3)^4(2x + 3y)^6$

❖  $Q(x, z) = 13y^4x^3(x + y)^4(x + z)^4z^7(y + 1)^3$

2. Factoriza:

$$P(m, n) = 3mn - 6m^2 + 12m$$

3. Factoriza:

$$P(x, y) = 3x^2y^3 + 6x^3y^2 + 9x^4y$$

e indica la cantidad de factores primos.

### PUCP

4. Factoriza:

$$P(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy - 2xy$$

e indica la suma de factores primos.

Resolución:

$$P(x, y) = \underbrace{2x^2}_{\text{m}} + \underbrace{y^2}_{\text{m}} - \underbrace{xy}_{\text{m}} - \underbrace{2xy}_{\text{m}}$$

Agrupamos de dos en dos:

$$P(x, y) = 2x(\underline{x - y}) - y(\underline{x - y})$$

$$P(x, y) = (x - y)(2x - y)$$

$$\text{Sumamos: } x - y + 2x - y$$

$$3x - 2y$$

5. Factoriza:

$$P(m, n) = 3m^2 + n^2 - mn - 3mn$$

e indica el factor primo con mayor suma de coeficientes.

6. Factoriza:

$$P(x) = 6x^2 - x - 2$$

indica la suma de factores primos.

7. Factoriza:

$$P(x) = x^2 - 3x - 40$$

e indica el factor primo con mayor término independiente.

### UNMSM

8. Factoriza:

$$P(x, y) = x^2 + xz + yz - y^2$$

señala la suma de factores primos.

Resolución:

$$P(x, y) = \underbrace{x^2}_{\text{m}} + \underbrace{xz}_{\text{m}} + \underbrace{yz}_{\text{m}} - \underbrace{y^2}_{\text{m}}$$

Agrupamos de dos en dos:

$$P(x, y) = \underline{x^2 - y^2} + z(x + y)$$

$$P(x, y) = (x - y)(\underline{x + y}) + z(\underline{x + y})$$

$$P(x, y) = (x + y)(x - y + z)$$

$$F.P. = \left\{ \begin{array}{l} x + y \\ \underline{x - y + z} \end{array} \right\} \oplus$$

$$\text{Suma de F.P.} = 2x + z$$

9. Factoriza:  $P(m, n) = m^2 + mp - np - n^2$

10. Factoriza:  $P(m, n) = 4m^2 - n^2$

11. Factoriza:  $R(x, y) = x^3 - 8y^3$ . Indica el factor primo con mayor suma de coeficientes.

UNI

12. Factoriza:

$$M(x, y) = x^6 - y^6$$

Resolución:

$$M(x, y) = x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \\ x^3 \quad y^3 \end{array}$$

$$M(x, y) = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)$$

Obs.

$$(x^3 + y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\Rightarrow M(x, y) = (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

13. Factoriza:

$$P(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + xz + yz$$

14. Factoriza:

$$F(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

e indica la cantidad de factores primos.