Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA CUARTO

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Definición

Una ecuación de segundo grado es toda ecuación en la cual una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2.

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Caso 1: Forma: $ax^2 + bx + c = 0$

a) **Factorización (aspa simple)**

Si: $x^2 + 8x + 7 = 0$

$$\begin{array}{ccc} x & \times & 7 \\ x & & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{(x + 7)}_{0}\ \underbrace{(x + 1)}_{0} = 0$$

$x = -7\ ;\ x = -1$

$CS = \{-7; -1\}$

b) **Fórmula general**

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si $x^2 - 9x + 2 = 0$

$a = 1\ ;\ b = -9\ ,\ c = 2$

$$x_{1;2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x_{1;2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{9 + \sqrt{73}}{2};\ x_1 = \frac{9 - \sqrt{73}}{2}$$

$$CS = \left\{\frac{9 + \sqrt{73}}{2};\ \frac{9 - \sqrt{73}}{2}\right\}$$

Caso 2: Forma $ax^2 - c = 0$

Si $2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$CS = \{-2; 2\}$

Caso 3: Forma $ax^2 + bx = 0$

Si $7x^2 + 8x = 0$

$$\underbrace{x}_{0}\ \underbrace{(7x + 8)}_{0} = 0$$

$x = 0 \qquad 7x + 8 = 0$

$7x = -8$

$x = -\dfrac{8}{7}$

$$CS = \left\{0\ ;\ -\frac{8}{7}\right\}$$

PROPIEDADES DEL DISCRIMINANTE

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ las raíces son reales y diferentes
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ las raíces son reales e iguales
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ las raíces son complejas y diferentes

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

1. Suma de raíces: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
2. Productos de raíces: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$
3. Diferencia de raíces: $x_1 - x_2 = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

Raíces especiales

- Raíces simétricas: $b = 0$
- Raíces recíprocas: $a = c$
- Raíz nula: $c = 0$
- Raíces iguales: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Construcción de una ecuación de segundo grado

Si x_1 y x_2 son las dos raíces,
luego la construcción será:

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

OJO

Si $1 + \sqrt{3}$ es raíz entonces $1 - \sqrt{3}$ también es raíz.

Si $2 - \sqrt{3}$ entonces $2 + \sqrt{3}$ también es raíz.

Trabajando en clase

Integral

1. Resuelve:
$(5x + 3)^2 = (3x + 5)^2$
Indica la menor raíz.

2. Resuelve:
$(2x + 1)^2 = (x + 2)^2 - 3 + 2x$
Indica la mayor raíz.

3. Resuelve:
$(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = x^2 + 7$

PUCP

4. Resuelve:
$x^2 + 3x - 2 = 0$
Resolución:
Al verificar la ecuación con aspa simple, no se puede factorizar, entonces se resolverá con la fórmula general.
$x^2 + 3x - 2 = 0$
$a = 1; b = 3; c = -2$

$$x_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2(1)}$$

$$x_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$CS = \left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

5. Resuelve:
$3x^2 + 5x - 1 = 0$

6. Si una raíz de la ecuación
$px^2 - (p + 1)x + 5p - 1 = 0$ es -3, calcula P.

7. Si el discriminante de $5x^2 - 3x + a - 1 = 0$ es 7, calcula «a».

UNMSM

8. Si la suma de raíces es igual a tres veces el producto en $(m - 1)x^2 + (3 - m)x + 2m + 1 = 0$
calcula «m».
Resolución:

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(3 - m)}{m - 1}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 3x_1 \cdot x_2$$

$$\frac{-(3 - m)}{\cancel{m - 1}} = \frac{3(2m+1)}{\cancel{m - 1}}$$

$m - 3 = 6m + 3$
$-6 = 5m$

$$-\frac{6}{5} = m$$

9. Si la suma de raíces es igual a dos veces el producto en $(a + 1)x^2 + (a - 2)x + 2a + 3 = 0$,
calcula «a».

10. Halla la suma de los inversos de las raíces de la ecuación:
$2x^2 - 3x + 4 = 0$

UNMSM 2010-II

11. Si $z^2 = 113 + f(z)$, halla la suma de los valores de z que resuelven la ecuación $2f(z) = z + 5$.

UNMSM 2005 – II

UNI

12. Si las ecuaciones:
$2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5$ y $ax^2 + bx + 8 = 0$

UNI 2011-II

tienen las mismas raíces, halla «a + b».
Resolución:

$$\Rightarrow \left(2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5\right)\cdot \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x}^2 + 2 = 5\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x}^2 - 5\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\begin{array}{ll} 2\sqrt{x} & -1 \\ \sqrt{x} & -2 \end{array}$$

$$(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}; \sqrt{x} = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 4$$

Como la otra ecuación tiene las mismas raíces, construimos la ecuación:

$$x^2 - \left(\frac{1}{4} + 4\right)x + \frac{1}{4}\cdot 4 = 0$$

$$x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0$$

$4x^2 - 17x + 4 = 0 \Rightarrow 8x^2 - 34x + 8 = 0$

$ax^2 + bx + 8 = 0$

$\Rightarrow a = 8; b = -34$

$\therefore\ a + b = -26$

13. Si las ecuaciones:

$3\sqrt{y} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 10$ y $mx^2 + nx + 9 = 0$

tienen las mismas raíces, halla «a + b».

14. Sea la ecuación $4x^2 - 2x + 3 = 0$ cuyas raíces son «a» y «b», halla otra ecuación cuadrática que tenga por raíces $(2a - 1)$ y $(2b - 1)$.

UNI 2008 – I