



ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Las identidades son ecuaciones que contienen funciones trigonométricas que verifican para todo valor de la variable (valor admisible).

En esta lección estudiaremos las ecuaciones que contienen funciones trigonométricas que verifican solo para ciertos valores, a dichas ecuaciones llamaremos ecuaciones trigonométricas.

Ejemplos

$$\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctgx} = \operatorname{Secx}\operatorname{Cscx} \quad : \text{identidad}$$

$$\operatorname{Sen}^2x + \operatorname{Cos}^2x = 1 \quad : \text{identidad}$$

$$\operatorname{Sen}x = \frac{1}{2} \quad : \text{ecuación trigonométrica}$$

$$\operatorname{Cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad : \text{ecuación trigonométrica}$$

Clasificación de ecuaciones trigonométricas

I. Ecuaciones trigonométricas elementales

Son de la siguiente forma:

$$\text{F.T. } (ax + b) = N$$

Ejemplos:

$$\operatorname{Sen}3x = \frac{3}{5} \quad \text{Ec. T. Elemental}$$

$$\operatorname{Cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{Ec. T. Elemental}$$

$$\operatorname{Tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{Ec. T. Elemental}$$

$$\text{Resuelve } \operatorname{Cos}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow > 0, \text{ hay solución en el I y IV cuadrante}$$

$$\rightarrow x = 45^\circ, 315^\circ$$

Para obtener las demás soluciones se les va agregando o restando 360° a cada valor obtenido.

$$\text{Resuelve } \operatorname{Sen}(2x) = \frac{1}{2} \Rightarrow > 0, \text{ hay solución en el I y II cuadrante}$$

$$\rightarrow 2x = 30^\circ, 150^\circ \\ \Rightarrow x = 15^\circ, 75^\circ$$

II. Ecuaciones trigonométricas no elementales

Son ecuaciones que requieren del uso de operaciones adicionales para convertirlos en ecuaciones elementales, estas operaciones pueden ser transformaciones, identidades, operaciones algebraicas, etc.

Recuerda

$$\text{Si } \operatorname{Sen}x = N$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{ArcSen}(N)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \operatorname{Cos}x = N$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{ArcCos}(N)$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$-1 \leq N \leq 1$$

Trabajando en clase

Integral

1. Resuelve e indica la primera y segunda solución de la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{Sen}3x = \frac{1}{2}$$

2. Resuelve e indica la segunda solución de la E. T. $2\operatorname{Cos}5x - \sqrt{2} = 0$

3. Indica la suma de las dos primeras soluciones positivas de: $3\operatorname{Tan}2x - \sqrt{3} = 0$

PUCP

4. Halla el menor valor positivo que toma «x» en la E.T.

$$\frac{1}{1 + \text{Cos}x} = \frac{1}{1 - \text{Cos}x} = 8$$

Resolución:

Operando, tenemos:

$$\frac{1 - \text{Cos}x + 1 + \text{Cos}x}{(1 + \text{Cos}x)(1 - \text{Cos}x)} = 8$$

$$\frac{2}{1 - \text{Cos}^2x} = \frac{4}{\text{Sen}^2x} = 4 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 2 \text{Sen}^2x$$

$$2 \text{Sen}^2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \text{Cos}2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Cos}2x = \frac{1}{2}$$

Luego: $2x = 60 \rightarrow x = 30^\circ$

5. Halla el menor valor positivo que toma «x» en la E.T.

$$\frac{1}{1 + \text{Sen}x} = \frac{1}{1 - \text{Sen}x} = \frac{8}{3}$$

6. Resuelve: $1 + \text{Cos}x = 2 \text{Sen}^2x$
Indicando la suma de sus dos primeras soluciones positivas.

7. Resuelve e indica la solución en el intervalo $\langle 270^\circ; 360^\circ \rangle$ de la E. T.

$$\text{Sen}x + \text{Sen}3x + \text{Sen}5x = 0$$

UNMSM

8. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica
 $\text{Sen}5x + \text{Sen}x = \text{Cos}5x + \text{Cos}x; x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

Resolución:

Por transformaciones, tenemos:

$$2 \text{Sen}3x \text{Cos}2x = 2 \text{Cos}3x \text{Cos}2x$$

$$2 \text{Cos}2x (\text{Sen}3x - \text{Cos}3x) = 0$$

$$\text{Cos}2x = 0 \vee \text{Sen}3x - \text{Cos}3x = 0$$

$$2x = 90^\circ; 270^\circ \vee \text{Sen}3x = \text{Cos}3x \rightarrow \frac{\text{Sen}3x}{\text{Cos}3x} = 1$$

$$x = 45^\circ; 135^\circ \vee \text{Tan}3x = 1 \rightarrow 3x = 45^\circ; 225^\circ; 405^\circ$$

$$x = 15^\circ; 75^\circ; 135^\circ$$

Los valores de «x» son: $\{15^\circ; 45^\circ; 75^\circ\}$ o

$$\left\{ \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12} \right\}$$

9. Calcula la menor solución positiva de la E.T.

$$\text{Sen}5x + \text{Sen}13x = \sqrt{3} (\text{Cos}5x + \text{Cos}13x)$$

10. Resuelve la E. T.: $\sqrt{3} \text{Cos}x = 1 + \text{Sen}x$, donde $x \in [0^\circ; 360^\circ]$

11. Resuelve e indica la suma de las dos primeras soluciones positivas de la E. T.:

$$\text{Sen}6x - \text{Sen}2x = \sqrt{3} \text{Cos}4x$$

UNI

12. Resuelve la E. T. en el intervalo $\langle 0; \frac{3\pi}{2} \rangle$

$$\text{Sen}3x + 2 \text{Cos}2x + 1 = 0$$

Resolución:

$$\text{Sen}3x + 2 \text{Cos}2x + 1 = 0$$

↓

$$3 \text{Sen}x - 4 \text{Sen}^3x + 2(1 - 2 \text{Sen}^2x) + 1 = 0$$

$$3 \text{Sen}x - 4 \text{Sen}^3x + 2 - 4 \text{Sen}^2x + 1 = 0$$

$$(3 \text{Sen}x + 3) - 4(\text{Sen}^3x + \text{Sen}^2x) = 0$$

$$\rightarrow 3(1 + \text{Sen}x) - 4 \text{Sen}^2x (1 + \text{Sen}x) = 0$$

$$(1 + \text{Sen}x)(3 - 4 \text{Sen}^2x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \text{Sen}x = 0 \rightarrow \text{Sen}x = -1 \rightarrow x = 270^\circ$$

$$3 - 4 \text{Sen}^2x = 0 \rightarrow 3 = 4 \text{Sen}^2x$$

$$\rightarrow 2 \text{Sen}^2x = \frac{3}{2} \rightarrow 1 - \text{Cos}2x = \frac{3}{2}$$

$$1 - \frac{3}{2} = \text{Cos}2x$$

$$\Rightarrow \text{Cos}2x = -\frac{1}{2}; x = 60^\circ$$

$$\therefore 2x = 120^\circ; 240^\circ; 480^\circ; 600^\circ$$

$$x = 60^\circ; 120^\circ; 240^\circ; 300^\circ$$

$$\therefore x = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$$

13. Resuelve la E. T. en el intervalo $\langle 0; \pi \rangle$
 $\text{Cos}6x + 3 = 4 \text{Cos}2x$, e indica la mayor solución.

14. Calcula la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación:

$$2 \text{Cos}2x = -4 \text{Cos}x - 3$$