



# Materiales Educativos GRATIS

## ALGEBRA

## QUINTO

# ECUACIONES LOGARÍTMICAS

### Definición

Dados  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  y  $x > 0$ . El logaritmo de  $x$  en base, denotado con  $\log_b x$  es el número  $y \in \mathbb{R}$ , tal que  $b^y = x$ .

Simbólicamente,  $\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$

### Identidad fundamental

$$b^{\log_b x} = x$$

### Propiedades

Dados  $a, x, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $b > 0$ ;  $b, x, y \neq 1$ , se tiene:

I.  $\log_{b^n} x^m = \frac{m}{n} \log_b x$

II.  $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$

III.  $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

IV.  $\log_b x \log_x y \log_y a = \log_b a$

V.  $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

### Antilogaritmos

$$\text{antilog}_b y = b^y$$

### Cologaritmos

$$\text{colog}_b x = -\log_b x = \log_b \frac{1}{x}$$

### Ecuaciones logarítmicas

$$\log_b x = \log_b y \text{ entonces } x = y$$

► Resuelve:

$$\log_x (x - 3) = \log_x (5 - x)$$

Primer paso:  $x > 0$  y  $x \neq 1$ ;  $x - 3 > 0$  y  $5 - x > 0$

entonces:  $x > 3$  y  $x < 5$

por lo que  $x \in (3; 5)$

Segundo paso:

$$x - 3 = 5 - x$$

$$x = 4$$

## Trabajando en clase

### Integral

1. Calcula el valor de «b» que satisface la siguiente igualdad:

$$\log_b \sqrt[4]{125} = \frac{3}{2}$$

UNI 1981

2. Resuelve:

$$\log_{27} x + \log_9 x + \log_3 x = \frac{11}{18}$$

UNALM 2001

3. Resuelve:  $\log x + \log(x + 3) = \log(x + 1)^2$

UNFV 2011

### PUCP

4. Si Z es una solución de la ecuación:

$$\log_9 [\log_2 (\log_3 (81z))] = \frac{1}{2}$$

Calcula el valor de  $\sqrt{z} - 1$

Resolución:

Aplicando la definición en:

$$\log_{\textcircled{1}} [\log_2 (\log_3 (81z))] = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\textcircled{2}} (\log_3 (81z)) = 9^{1/2^1} \rightarrow 3$$

$$\log_3(81z) = (2^3)^8$$

$$\Rightarrow 81z = 3^8$$

$$z = \frac{3^8}{81} = \frac{3^8}{3^4} = 3^4$$

$$\therefore \sqrt{z} - 1 = \sqrt{81} - 1 = 9 - 1 = 8$$

5. Si Z es la solución de la ecuación:

$$\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$$

el valor de  $z^2 + 2z + 1$

6. Calcula el valor de «x»

$$\text{Log}_3(5x - 1) + \text{colog}_3(3x - 5) = 2$$

7. Resuelve:

$$7^{\log_7(x^2 + 5)} = 4^{\log_2(x+1)}$$

### UNMSM

8. Resuelve:

$$\log_2 x^{\log_2 x} - \log_2 x^5 = -4$$

**Resolución:**

Recuerda que:

$$\log_b x^n = n \log_b x$$

Se tiene la expresión:

$$\log_2 x^{\log_2 x} - \log_2 x^5 = -4$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 x - 5 \log_2 x + 4 = 0$$

$$(\log_2 x)^2 - 5(\log_2 x) + 4 = 0$$

$$\log_2 x \quad -4$$

$$\log_2 x \quad -1$$

$$(\log_2 x - 4)(\log_2 x - 1) = 0$$

$$= 0 \quad = 0$$

De donde:

$$\log_2 x = 4 \vee \log_2 x = 1$$

Por definición de logaritmo

$$\therefore x = 2^4 \vee x = 2^1$$

9. Calcula el valor de «x» en la siguiente ecuación:

$$\log x^{\log x} - \log x - 6 = 0$$

Da como respuesta el producto de soluciones.

10. Calcula el valor de «x» en la siguiente ecuación:

$$2 + \log_x(x-1)^2 + \log_x \frac{1}{x^2} = \log_x x^2$$

UNMSM 2004-I

11. Si «n» es un número entero positivo

$$2^{\log_2 4} - 1 = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 2^n$$

calcula el valor de  $\log_{\frac{1}{n}} 4$

UNMSM 2012-II

### UNI

12. Si  $x = 81a$ ;  $y = \frac{a}{81}$ ; además:

$(\log_a x)^2 + 6(\log_a y) - 7 = 0$ , entonces los valores de «a»,  $\log_a y$  y  $\log_a x$  son:

UNI 1982

**Resolución:**

Reemplazando  $x = 81a$  y  $y = \frac{a}{81}$  en

$$(\log_a x)^2 + 6(\log_a y) - 7 = 0$$

$$[\log_a(81a)]^2 + 6[\log_a(a/81)] - 7 = 0$$

$$[\log_a 81 + \log_a a]^2 + 6[\log_a a - \log_a 81] - 7 = 0$$

$$\log_a^2 81 + 2\log_a 81 + 1 + 6 - 6\log_a 81 - 7 = 0$$

$$\log_a^2 81 - 4\log_a 81 = 0$$

$$\log_a 81 (\log_a 81 - 4) = 0$$

Entonces,  $\log_a 81 - 4 = 0$

$$\log_a 81 = 4$$

$$a^4 = 81 \Rightarrow a = 3$$

Por lo tanto:  $x = 81a = 243$

$$y = \frac{a}{81} = \frac{1}{27}$$

Luego, tenemos:

$$a = 3; \log_a y = \log_3 1/27 = -3; \log_a x = \log_3 243 = 5$$

13. Dado la ecuación:

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 0,5x)^2 + (\log_2 0,25x)^2 = 5$$

El menor valor de sus raíces es:

UNI 2013-II

14. Dada la siguiente ecuación:

$$\log(2x-1)^n + \log(x-1)^{10 \log n} = n$$

Calcula «x», sabiendo que «n» es cualquier entero positivo y log es el logaritmo en base 10.