



Material Educativos GRATIS

ALGEBRA

QUINTO

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Son aquellas ecuaciones que pueden reducirse a la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Donde:

$ax^2 \rightarrow$ término cuadrático

$bx \rightarrow$ término lineal

$c \rightarrow$ término independiente

a, b y c son los coeficientes respectivos de sus términos

Resolución de una ecuación cuadrática

1. Por factorización

Ejemplos:

- $x^2 + 7x = 0$

Factorizando por factor común

$$\begin{array}{r} x \\ 123 \end{array} \begin{array}{r} (x+7) \\ 14243 \\ =0 \end{array} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -7$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{-7; 0\}$$

- $x^2 + 5x - 14 = 0$

Factorizando por aspa simple:

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 14 = 0 \\ x \quad \quad -2 \\ x \quad \quad +7 \\ (x-2)(x+7) = 0 \\ 1424314243 \\ =0 \end{array}$$

$$(x-2)(x+7) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -7$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{-7; 2\}$$

2. Por fórmula

Se aplica cuando no es posible la factorización.

Sea la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ y

la discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

Las soluciones o raíces son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\vee$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ejemplo:

- $x^2 + x - 1 = 0$

Identificamos $a = 1, b = 1, c = -1$

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-1) = 5$$

Por lo cual, las raíces son:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Propiedades de las raíces

Sea la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

Donde se cumple:

► Suma de raíces

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

► Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

► Suma de inversas de las raíces

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-b}{c}$$

► Diferencia de raíces

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Ejemplo:

- $x^2 + 2x - 5 = 0$

Identificamos: $a = 1, b = 2, c = -5$

Entonces:

$$\diamond x_1 + x_2 = \frac{-(2)}{1} = -2$$

$$\diamond x_1 \cdot x_2 = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\diamond \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-(2)}{-5} = \frac{2}{5}$$

► Para la diferencia, primero se calcula:

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-5) = 24$$

$$\rightarrow x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{24}}{1} = 2\sqrt{6}$$

Análisis de la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de coeficientes reales, raíces x_1 ; x_2 y discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ se cumple:

1. Si $\Delta > 0$, las raíces x_1 ; x_2 son reales y $x_1 \neq x_2$
2. Si $\Delta = 0$, las raíces x_1 ; x_2 son reales y $x_1 = x_2$
3. Si $\Delta < 0$, las raíces x_1 ; x_2 no son reales, son complejos imaginario y conjugados, es decir:

$$x_1 = m + ni$$

$$x_2 = m - ni$$

Reconstrucción de una ecuación cuadrática

Si x_1 ; x_2 son las raíces de una ecuación cuadrática, entonces la ecuación viene dada por

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Ejemplo:

- Reconstruye la ecuación cuadrática cuyas raíces son $x_1 = -7$ y $x_2 = 5$

La ecuación cuadrática es

$$x^2 + (-7 + 5)x + (-7)(5) = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

Raíces especiales de una ecuación cuadrática

Dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ de raíces } x_1 \text{ y } x_2 \text{ (no nulas).}$$

Diremos que la ecuación:

1. Tiene raíces simétricas si y solo si $x_1 = -a$ y $x_2 = a$; es decir: $x_1 + x_2 = 0$
2. Tiene raíces recíprocas si y solo si $x_1 = a$ y $x_2 = \frac{1}{a}$; es decir: $x_1 \cdot x_2 = 1$

Trabajando en clase

Integral

1. Resuelve
 - a) $2x^2 - 5 = 11$
 - b) $3x^2 + 7x = 0$
 - c) $x^2 - 7x - 60 = 0$
2. Resuelve

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$
3. Si: $5x^2 + 7x - 2 = 0$, cuyas raíces son x_1 y x_2
Calcula:
 - a) $x_1 + x_2$
 - b) $x_1 \cdot x_2$
 - c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

PUCP

4. Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
 Calcula el valor de:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

Resolución

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2}$$

De la ecuación

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \wedge x_1 \cdot x_2 = 1 \\ \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ 3^2 &= x_1^2 + 2 + x_2^2 \\ 7 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{7}{1} = 7$$

5. Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Calcula el valor de: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

6. Si m y n son raíces de:

$$x^2 + 5x - 2 = 0$$
 Calcula $m^3 + n^3$

7. Si r y s son raíces de:

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$
 Calcula $(r+1)(s+1)$

UNMSM

8. ¿Para que valores de «a» la ecuación:

$$x^2 - (3a - 1)x + 5a + 1 = 0$$
 admite raíces iguales

Resolución

Como admite raíces iguales entonces: $\Delta = 0$

$$\rightarrow [-(3a-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5a+1) = 0$$

$$9a^2 - 6a + 1 - 20a - 4 = 0$$

$$9a^2 - 26a - 3 = 0$$

$$9a^2 - 26a - 3 = 0$$

$$9a^2 - 26a - 3 = 0$$

$$\therefore \text{valores de «a»}: -\frac{1}{9} \wedge 3$$

9. En la ecuación:

$$x^2 - 2(n-3)x + 4n = 0$$

Determina los valores que puede tomar «n» para que la ecuación tenga raíces iguales.

Da como respuesta la suma de estos valores

UNMSM 2004-I

10. Calcula la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación

$$(2k+2)x^2 + (4-4k)x + (k-2) = 0,$$
 donde una raíz es el universo multiplicativo de la otra.

UNMSM 2008-I

11. Sea $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. Indica el polinomio cuya raíz es « α^2 »
UNMSM 2008-I

UNI

12. Determina el valor de «m», de modo que en la ecuación:
 $x^2 - 2mx + m = 0$, una de las raíces sea el triple de la otra.

Resolución:

$$\Rightarrow x_1 = k$$

$$x_2 = 3k$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad x_1 + x_2 = 4k \\ & \quad \quad \quad 14243 \\ & \quad \quad \quad 2m = 4k \rightarrow m = 2k \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad x_1 x_2 = 3k^2 \\ & \quad \quad \quad 3' m = 3' k^2 \rightarrow m = k^2 \dots (2) \end{aligned}$$

Igualando (1) y (2)

$$\Rightarrow 2k = k^2 \rightarrow 2 = k$$

$$\text{De (1) } m = 2(2) \therefore m = 4$$

13. Dada la ecuación
 $2x^2 + mx + 30 = 0$ y

x_1 y x_2 son raíces, ¿para qué valores de «m» se cumple que
 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{5}$?

UNI 2001-I

14. Calcula m+n, tal que las ecuaciones tengan las mismas raíces:

$$(5m-52)x^2 - (m-4)x + 4 = 0$$

$$(2n+1)x^2 - 5nx + 20 = 0$$

CEPREUNI 2013-I