DIVISIÓN DE POLINOMIOS

DEFINICIÓN DE DIVISIÓN ALGEBRAICA

Es la operación cuya finalidad es obtener las expresiones algebraicas llamadas cociente y residuo; dadas otras dos expresiones denominadas dividendo y divisor.

$$D(x) = d(x) \cdot q(x) + R(x)$$

$R(x)$ → Residuo
$q(x)$ → Cociente
$d(x)$ → Divisor
$D(x)$ → Dividendo

CLASES DE DIVISIÓN

1. División exacta

$$R(x) \equiv 0$$

Entonces:

$$\boxed{D(x) = d(x) \cdot q(x)}$$

2. División inexacta

$$R(x) \neq 0$$

Entonces:

$$\boxed{D(x) = d(x) \cdot q(x) + R(x)}$$

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

1. Existencia de la división algebraica

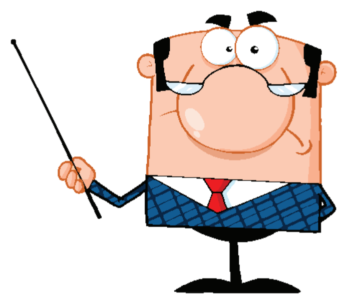
$$G.A.(D) \geq G.A.(d) > G.A.(R)$$

2. Grado del cociente

$$G.A.(q) = G.A.(D) - G.A.(d)$$

3. Grado máximo del residuo

$$G.A.\ máx.\ (R) = G.A.\ (d) - 1$$

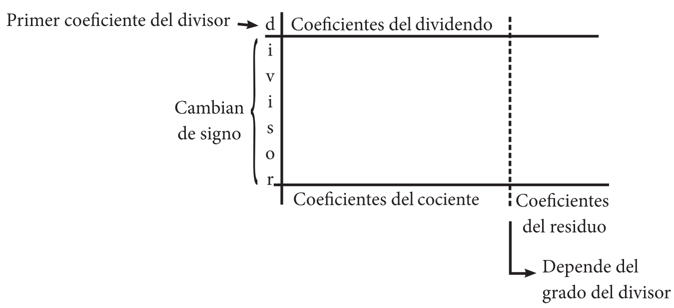


MÉTODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS

1. Método de W. Horner:

Se utiliza para dividir polinomios de cualquier grado. Presenta el siguiente esquema:

Esquema:



2. Método de Ruffini:

Este método es aplicable cuando el divisor es de primer grado de la forma (ax + b); a ≠ 0

Caso I:

Cuando a = 1; se tiene (x + b). También aquí operamos solo con coeficientes, ordenado y completando los polinomios. Dichos coeficientes se escriben en el siguiente esquema de Ruffini. Presenta el siguiente esquema.

Esquema:

El divisor se iguala a cero

x+b=0

x=-b

Coeficientes del dividendo

Coeficientes del cociente

Resto

Caso II

Cuando a ≠ 1; se tiene (ax + b). El procedimiento es el mismo que en el primer caso.

ax + b = 0; a ≠ 0

$x = -\frac{b}{a}$

Coeficientes del dividendo

Coeficientes del cociente alterado

Resto

÷

Coeficientes del cociente verdadero

Primer coeficiente del divisor "a"

Importante

* En la división algebraica generalmente las expresiones algebraicas son polinomios.
* Si a un polinomio le faltan términos estos se completan con ceros.

3. Teorema del resto

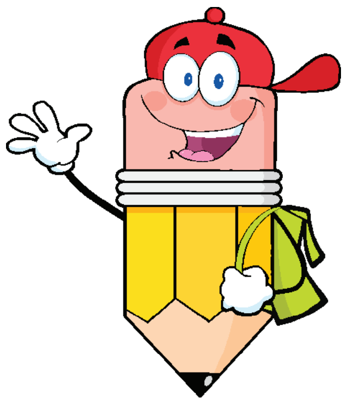
Este teorema se aplica en divisiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{ax+b};\ a \neq 0$$

El resto se obtiene calculando el valor numérico del dividendo.

Cuando $x = -\frac{b}{a}$, entonces:

$$\text{Resto} = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$



Trabajando en clase

Integral

1. Divide:

$$\frac{2x^4+5x^3-2x^2+4x+8}{2x^2+x-2}$$

Calcula el cociente y el residuo

2. De la pregunta anterior, calcula la suma de coeficiente del cociente.

3. Divide el siguiente polinomio y da como respuesta el cociente.

$$\frac{3m^5+18m^2-7m^3+2+m}{m^3+m+6}$$

PUCP

4. Calcula m + n si la siguiente división es exacta.

$$\frac{x^5+2x^3-13x^2-mx+n}{x^2-3x+3}$$

Resolución

1÷	1	0	2	−13	−m	n
3		3	−3			
−3			9	−9		
				24	−24	
					6	−6
×	1	3	8	2	0	0

Entonces:

$-m - 24 + 6 = 0 \wedge n - 6 = 0$

$\Rightarrow m = -18 \qquad \Rightarrow n = 6$

$\therefore\ m + n = -12$

5. Calcula a + b + c si $5x^2 + 11x + 4$ es el residuo de la siguiente división:

$$\frac{8x^5+4x^3+ax^2+bx+c}{2x^3+x^2+3}$$

6. El polinomio por el cual hay que dividir $x^3 - 2$ para obtener $x - 3$ como cociente y $8x + 1$ como residuo.

PUCP 2008-II

7. Calcula A + B si la siguiente división es exacta:

$$\frac{Ax^4+Bx^3+14x^2+8x+3}{x^2+2x+3}$$

UNMSM

8. ¿Cuál es el valor de α para que el polinomio

$$x^3 + (\alpha^2 + x - 1)x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha$$

sea divisible por $(x + 2)$?

UNMSM 2004-I

Resolución:

Como es divisible entonces es exacto.

$D(x) = d(x) \cdot q(x)$

$$x^3+(\alpha^2+\alpha-1)x^2+(\alpha-1)x+\alpha=(\underbrace{x+2}_{0}).q(x) \qquad x=-2$$

$$(-2)^3+(\alpha^2+\alpha-1)(-2)^2+(\alpha-1)(-2)+\alpha=0$$

$$-8+(\alpha^2+\alpha-1)(4)-2\alpha+2+\alpha=0$$

$$4\alpha^2+4\alpha-4\ -\alpha+2-8=0$$

$$4\alpha^2+3\alpha-10=0$$

$$\begin{array}{ll} 4\alpha^2 & -5 \\ \alpha & +2 \end{array}$$

$$(\underbrace{4\alpha-5}_{0})(\underbrace{\alpha+2}_{0})=0$$

$$\alpha=\frac{5}{4}\ ;\ \ \alpha=-2$$

9. Si se divide el polinomio

$$x^3+2ax^2-a^2x+2a^3 \text{ por } (x-2a)$$

¿cuál debe ser el valor de a^2, de modo que el residuo sea 2?

UNMSM 2005-I

10. Determina el cociente de la siguiente división:

$$\frac{4x^3-4x^2+3x+8}{2x+1}$$

11. Divide el siguiente polinomio e indica el cociente y el residuo.

$$\frac{3x^4+2\sqrt{2}x^3+4x^2+\sqrt{2}x-10}{3x-\sqrt{2}}$$

UNI

12. Calcula el valor de m + n + p si el polinomio

$$P(x)=x^5-2x^4-6x^3+mx^2+nx+p$$

es divisible por $(x - 3)$ y $(x^2 - 1)$

Resolución:

Como

$$\frac{x^5-2x^4-6x^3+mx^2+nx+p}{\underbrace{(x-3)(x^2-1)}_{(x^3-3x^2-x+3)}}$$

AplicandoHorner:

1	1	-2	-6	m	n	p
3		3	1	-3		
1			3	1	-3	
-3				-6	-2	6
	1	1	-2	0	0	0

(Por ser divisible el R(x) = 0)

- $m - 3 + 1 - 6 = 0$
  $m = 8$
- $n - 3 - 2 = 0$
  $n = 5$
- $p + 6 = 0$
  $p = -6$

$\therefore\ m+n+p=7$

13. Determina m – n de manera que el polinomio $x^4 - 3x^3 + mx + n$ sea divisible por $x^2 - 2x + 4$.

14. Determina el cociente al dividir

$P(x) = 3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$ entre $(x + 1)(x - 2/3)$

UNI 2013-I