DIVISIÓN ALGEBRAICA

Sean D(x) y d(x) dos polinomios, tales que el grado de D(x) es mayor o igual que el grado de d(x).

La división está denotada por $D(x) \div d(x)$ o $\dfrac{D(x)}{d(x)}$, y consiste en hallar los polinomios q(x) y R(x).

$$\boxed{D(x) = d(x) \,.\, q(x) + R(x)}$$

Donde:

- D(x): Dividendo
- d(x): Divisor
- q(x): Cociente
- R(x): Residuo o resto

Además: $GA(D) \geq GA(d)$ y $GA(d) > GA(R)$

CLASES DE DIVISIÓN

De acuerdo a su resto, se puede clasificar en:

I. División exacta:
La división es exacta si y solo si $R(x) \equiv 0$

$$\boxed{D(x) = d(x) \,.\, q(x)}$$

II. División inexacta:
La división es inexacta si y solo si $R(x) \neq 0$

$$\boxed{D(x) = d(x) \,.\, q(x) + R(x)}$$

PROPIEDADES DE GRADOS DE LA DIVISIÓN

I. El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.

$$GA(q) = GA(D) - GA(d)$$

II. El máximo grado que puede alcanzar el residuo, es igual al grado del divisor menos uno.

$$GA_{max}(R) = GA(d) - 1$$

MÉTODOS PARA DIVIDIR POLINOMIOS

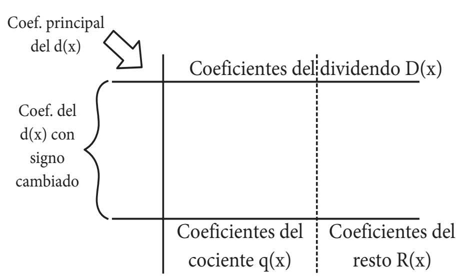
I. Método de Horner

Se utiliza para dividir polinomios de cualquier grado.

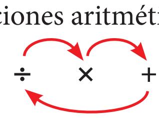
Procedimiento

Paso 1: Los polinomios dividendo D(x) y el divisor d(x) deben estar completos, y si falta algún término, en su lugar se reemplazará con un coeficiente cero.

Paso 2: Armar el esquema de Horner, donde los coeficientes del divisor van con signo cambiado. Además de trazar una línea vertical que separe los coef. del q(x) de los coef. del R(x).



Paso 3: El esquema se completa haciendo las siguientes operaciones aritméticas:



II. Método de Ruffini

Se considera un caso particular del método de Horner, puesto que este método se utiliza cuando el divisor es de primer grado o adopta la forma lineal: $d(x) = ax + b$; $a \neq 0$.

Procedimiento

Paso 1: El polinomio dividiendo D(x) y el divisor d(x) deben estar completos, y si falta algún término, en su lugar se reemplazará con un coeficiente cero.

Paso 2: Armar el esquema de Ruffini, los coeficientes del dividendo van con su respectivo signo. Además trazar una línea vertical en el último término, de tal manera que separe los coef. q(x) de R(x).

$d(x) = o$ $ax + b = 0$ $x = -b/a$	Coeficientes del D(x)	
	Coeficientes del q(x)	R(x)

Nota: Si $a \neq 1$, se realiza una división adicional solo a los coeficientes del coeficiente q(x).

TEOREMA DEL RESTO

Este teorema se aplica en divisiones de la forma:

$$\frac{P(x)}{ax+b}$$

En este tipo de divisores, el resto se obtiene calculando el valor numérico del dividendo, cuando $x = -b/a$. Entonces:

$$R(x) = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo: Calcula el resto de dividir

$$\frac{(x+5)^{25} + (2+x)^2 - x - 7}{x+4}$$

1º paso: $d(x) = x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

2º paso: Reemplazamos este valor en el dividendo:

$R(x) = D(-4) = (-4 + 5)^{25} + (2 + -4)^2 - (-4) - 7$

$R(x) = 1^{25} + (-2)^2 + 4 - 7 = 1 + 4 - 3 = 2$

Ejemplo: Calcula el resto de dividir

$$\frac{x^{10} + 3x^8 + x^4 - 5}{x^2 + 1}$$

1º paso: $d(x) = x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1$

El dividendo se puede expresar como:

$D(x) = (x^2)^5 + 3(x^2)^4 + (x^2)^2 - 7$

2º paso: Reemplazamos $x^2 = -1$ en el dividendo D(x):

$R(x) = (-1)^5 + 3(-1)^4 + (-1)^2 - 7$

$R(x) = -1 + 3(1) + 1 - 7 = -1 + 3 - 6 = -4$

Trabajando en clase

Integral

1. Al dividir $\dfrac{2x^4 + 3x^2 - 3 + x^3}{2x^2 + x - 1}$, calcula el q(x) y R(x)

2. Calcula a – b, si la división:

$$\frac{3x^4 - x^3 + 4x^2 - ax + b}{x^2 + x + 3}$$ es exacta.

(CEPREUNAC)

3. Si el polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ es divisible por $x^2 + 2x - 8$; entonces, halla el valor de "a – b"

(UNFV 2007)

PUCP

4. En la división $\dfrac{9x^4 + 6x^3 + mx + n}{3x^2 + 2x - 1}$, el resto de la división es 3x + 7. Calcula el valor de m + n.

Resolución:

÷

3	9	6	0	m	n
–2		–6	3		
1		÷	0	0	
			÷	–2	1
	3	0	1	3	7

$\underbrace{3 \quad 0 \quad 1}_{\text{coef q(x)}}$ $\underbrace{3 \quad 7}_{\text{coef R(x)}}$

Entonces:

$R(x) = 3x + 7 = (m - 2)x + (n + 1)$

$m - 2 = 3 \wedge 7 = n + 1$

$m = 5 \wedge n = 6$

$\therefore m + n = 11$

5. Si el resto de dividir $\dfrac{8x^5 + 4x^3 - mx^2 + nx + p}{2x^3 + x^2 + 3}$

es $5x^2 - 3x + 7$, halla el valor de "m+n+p".

6. Calcula suma de coeficientes del cociente

$$\frac{6x^4 - 13x^3 - x^2 - 2x - 17}{2x - 5}$$

7. El polinomio por el cual hay que dividir $x^3 - 2$ para obtener $x - 3$ como cociente y $8x + 1$ como residuo, es:

(PUCP 2008 – II)

UNMSM

8. Halla el resto de dividir:

$$\frac{x^{2014} - 16x^{2010} + (2x - 3)^{50} - 7x + 9}{x - 2}$$

Resolución:

Por el teorema del resto:

$d(x) = x - 2 = 0$

$x = 2$

$R(x) = 2^{2014} - 16.2^{2010} + (2(2) - 3)^{50} - 7.2 + 9$

$R(x) = 2^{2014} - 2^4.2^{2010} + 1 - 14 + 9$

$R(x) = \cancel{2^{2014}} - \cancel{2^{2014}} - 4$

$R(x) = -4$

9. Halla el resto de dividir:

$$\frac{4(x - 7)^8 - (3x - 5)^5 + 8}{x - 3}$$

(UNMSM 2005 – I)

10. Se divide el polinomio $x^3 + 2ax^2 - 7ax^2 + 2a^3$ entre $x - a$ ¿cuál debe ser el valor de a^2 de modo que el residuo sea 1?

(UNMSM 2011 – I)

11. Calcula el resto al dividir:

$$\frac{x^{100} - x^{15} + x^8 + x^5 - 1}{x^2 + 1}$$

UNI

12. Halla el resto al dividir:

$$\frac{(x + 2)^6 + 2x^3 + 10}{(x + 3)(x + 1)}$$

(CEPREUNI 2013 – I)

Resolución:

Sabemos que si el d(x) es de 2do grado, entonces: R(x) es de grado uno.

$R(x) = ax + b$

Por el algoritmo de la división:

$D(x) = d(x) . q(x) + R(x)$

$(x+2)^6 + 2x^3 + 10 = (x+3)(x+2)q(x) + ax + b$

$$\begin{aligned} x = -3 &\rightarrow -47 = -3a + b \\ x = -1 &\rightarrow +9 = -a + b \end{aligned} \quad (\text{-})$$

$-2a = -52$

$a = 26 \wedge b = 35$

$R(x) = 26x + 35$

13. Determina el resto que se obtiene al dividir:

$$\frac{(x - 3)^{11} + (x - 4)^{11} + 7}{(x - 3)(x - 4)}$$

(CEPREUNI 2013 – I)

14. Determina el residuo de dividir:

$x^{300} + x^3 + 1$ entre $x^2 + x + 1$

(CEPREUNI 2008)