DIVISIÓN ALGEBRAICA DE POLINOMIOS

1. IDENTIDAD FUNDAMENTAL DE DIVISIÓN ENTERA

Dado los polinomios dividendo (D(x)), divisor (d(x)), cociente (q(x)) y residuo (R(x)), se cumple:

$$\boxed{D(x) \equiv d(x) \cdot q(x) + R(x)}$$

2. PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

- ❖ $\boxed{\text{Grado } D(x) \geq \text{Grado } d(x)}$
- ❖ $\boxed{\text{Grado } q(x) = \text{Grado } D(x) - \text{Grado } d(x)}$
- ❖ $\boxed{\text{Grado } R_{(x)} < \text{Grado } d_{(x)}}$
- ❖ Máx: Grado R(x) = Grado d(x)–1

¡Cuidado!

$$\frac{-6x+12}{3x^3} = \frac{-2x}{x^3} + \frac{4}{x^3}$$

Pero al dividir no nos genera un polinomio.

3. MÉTODO CLÁSICO O DIVISIÓN NORMAL

Paso 1: Se ordenan y se completan los polinomios dividendo y divisor (opcional completar), en forma descendente; y se escriben tal como vamos a dividir numéricamente.

Paso 2: Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniendo el primer término del cociente.

Paso 3: Se multiplica el término hallado del cociente por cada uno de los términos del divisor, y este producto se resta del dividendo. Para esto los términos del producto se cambian de signo.

Ejemplo:
Dividir:

$$\frac{6x^5 + 5x^4 + 38x^2 - 22x + 6}{2x^2 - 3x + 1}$$

Resolución:
Vemos que están ordenados solo falta completar.

$$\begin{array}{l|l}
6x^5 + 5x^4 + 0x^3 + 38x^2 - 22x + 6 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{6x^5} + 9x^4 - 3x^3 & 3x^3 + 7x^2 + 9x + 29 \\ \cline{1-1}
\quad 14x^4 - 3x^3 + 38x^2 & \\
\quad -\cancel{14x^4} + 21x^3 - 7x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad 18x^3 + 31x^2 - 22x & \\
\qquad -\cancel{18x^3} + 27x^2 - 9x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 58x^2 - 31x + 6 & \\
\qquad\quad -\cancel{58x^2} + 87x - 29 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 56x - 23 &
\end{array}$$

$q(x) = 3x^3 + 7x^2 + 9x + 29$

$R(x) = 56x - 23$

TRABAJANDO EN CLASE

1. Calcula el grado del cociente y el grado máximo de residuo en cada caso:

❖ $\dfrac{2x^4+3x^2+x+2}{2x^2+x+2}$

❖ $\dfrac{3x^3+2x^2+x+1}{x+1}$

❖ $\dfrac{6x^4+2x^5+x+5}{2x^3+3x^2+1}$

2. Sea un polinomio: $P(x)=2x^2+3x+m$ se divide entre x – 1, genera un residuo igual a 7. Calcula "m".

3. Divide $P(x)=x^3+2x+2$ entre $d(x)=x-1$

4. Calcula el resto de la división:

$$\frac{9x^4+6x^3+4x^2+x-2}{3x^2+x-1}$$

Resolución:
Verificamos que tanto el dividendo como el divisor estén completos y ordenados en forma descendente. Luego hacemos:

$$\begin{array}{l|l}
9x^4+6x^3+4x^2+x-2 & 3x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
\cancel{-9x^4}-3x^3+3x^2 & 3x^2+x+2 \\ \cline{1-1}
\quad 3x^3+7x^2+x & \\
\quad \cancel{-3x^3}-x^2+x & \\ \cline{1-1}
\qquad 6x^2+2x-2 & \\
\qquad \cancel{-6x^2}-2x+2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 0+0=0 &
\end{array}$$

$\therefore R(x)=0$

5. Halla el cociente de dividir:

$$\frac{x^4+2x^2+3x+4}{x^2+x+2}$$

6. Al dividir $P(x)=x^3+2x-2$ entre $d(x)=x-1$, se obtiene un cociente igual a: ax^2+bx+c. Calcula "(a+b+c)".

7. Al dividir

$D(x)=8x^4-6x^2+9x-2$

entre $d(x)=2x^2+x-2$ se obtuvo como residuo a mx + 2. Calcula "m^4".

8. Al dividir mediante el método clásico: $\dfrac{2x^3+2x^2+Ax+B}{2x^2-1}$ se obtuvo como resto 2x + 3, calcula "A + B".

Resolución:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+2x^2+Ax+B & 2x^2+0x-1 \\ \cline{2-2}
\cancel{-2x^3}+0x^2+x & x+1 \\ \cline{1-1}
\quad 2x^2+(A+1)x+B & \\
\quad \cancel{-2x^2}+0x+1 & \\ \cline{1-1}
\qquad (A+1)x+B+1 &
\end{array}$$

$\Rightarrow R(x)=\underbrace{(A+1)}x+\underbrace{B+1}$

Por dato: $R(x)=\;\;2x\;\;+\;\;3$

$\Rightarrow A+1=2 \wedge B+1=3$

$\Rightarrow A=1 \;\wedge\; B=2$

$\therefore A+B=3$

9. Al dividir mediante el método clásico: $\dfrac{6x^3+3x^2+Ax+B}{3x^2-2}$ se obtuvo como resto 4x + 2, calcula "A + B".

10. Calcula la suma de coeficientes del resto al dividir mediante el método clásico:

$$\frac{12x^5-6x^4+14x^3-30x^2+16x-9}{3x^3+2x-6}$$

11. Calcula "K" en la división exacta: $\dfrac{20x^3-7x^2+29x+k}{4x+1}$

12. Si el polinomio $P(x)=x^4+ax^3-bx^2+cx-1$ es divisible por $(x-1)(x+1)(x-2)$ el valor de "a + b + c" es:

Resolución:
Utilizamos la identidad fundamental de la división:

$D(x)\equiv q(x)\cdot d(x)+R(x)$

$a^4+ax^3-bx^2+cx-1=(x-1)$
$(x+1)(x-2)d(x)+0$

Para x = –1:

$\cancel{1}-a-b-c\cancel{-1}=\cancel{(-1-1)\underbrace{(-1+1)}_{0}(-1-2)d(x)+0}$

$\therefore a+b+c=0$

13. Si el polinomio: $P(x)=x^5+mx^3+nx^2+3x-2$ es divisible por $(x-1)(x+1)$, entonces el valor de "m . n" es:

14. El resto de la división de un polinomio P(x) entre x^2+3x+2 es 2x + 3 y entre x^2+2x-3 es x – 2. Calcula el resto de la división de P(x) entre x^2-1.