Materiales Educativos GRATIS

ALGEBRA QUINTO

CÁLCULO DE DETERMINANTES

Es una función que aplicada a una matriz cuadrada la transforma a un número real.

Notación:

$|A|$ o $\det(A)$

Cálculo de determinantes

De orden 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Entonces: } |A| = (3)(6) - (5)(4) = -2$$

De orden 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ aplicando la regla de Sarrus}$$

$$\overbrace{}^{-}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\underbrace{}_{+}$$

$$|A| = (2 + 0 + 40) - (30 - 4 + 0) = 16$$

Propiedades

Solo para matrices cuadradas

1. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

2. $|A| = |A^t|$

3. Si se intercambian dos filas o dos columnas de una matriz, el determinantes cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

Intercambiando las filas.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

4. Si una matriz tiene 2 filas o 2 columnas iguales, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

5. Si una matriz tiene una fila nula (o columna nula), su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 5 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

6. Si dos filas o columnas de una matriz tienen elementos respectivamente proporcionales, sus determinante es cero.

$\times 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 0 \qquad \times 2 \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 8 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

7. Si a una fila se le suma (o resta) un múltiplo de otra fila (o columna), su determinantes no se altera.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (7)(4) = -22$$

Si a la $f_1 + \frac{1}{2} f_2$ y se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (5)(2) - (4)(8) = -22$$

8. El determinante de una matriz diagonal, escalar o triangular, es igual al producto de multiplicar los elementos de su diagonal principal.

9. Si k es un escalar y A es una matriz de orden «A», entonces
$|kA| = k^n \cdot |A|$

10. El determinante de una matriz antisimétrica de orden impar es cero.

De orden mayor a 3

Se aplica el «Teorema de Laplace»

El determinante de una matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ es igual a la suma de los productos obtenidos de multiplicar los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

Ejemplo

Calcula el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Elegimos cualquier fila o columna en este caso la fila 2.

$$\text{Luego: } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -(-2)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (4)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(10 + 21) + 0(6 - 7) - 4(-9 - 5)$$

$$|A| = 62 + 0 + 56 = 118$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula «x» en:

$$\begin{vmatrix} x & 6 \\ x & x \end{vmatrix} = 16$$

2. Calcula el valor de «A + B», si:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula el det(A)

PUCP

4. Si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además M = A·B·C

Calcula det(M)

Resolución:

$|M| = |ABC| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$

Por propiedad 8

$|A| = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$

$|B| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

$|C| = (2)(-1)(1) = -2$

$\therefore M = 8 \cdot 64 \cdot -2 = -1024$

5. Si:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & \pi & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además $D = A \cdot B \cdot C$

Calcula $|D|$

6. Si A es de orden 3, además

$B = 2A$; $C = 3A$; $|A| = 2$

Calcula $|B| + |C|$

7. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$; entonces $\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$ es:

UNMSM

8. Si $A \,.\, A^t = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Calcula $|A| < 0$

Resolución:

Aplicando determinantes en ambos miembros:

$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

$|A| \cdot |A^t| = 15 - (-21)$; por propiedad $|A| = |A^t|$

$$\underbrace{|A| \cdot |A^t|}_{\downarrow}$$

$|A| \cdot |A| = 36$

$|A|^2 = 36$

$\therefore |A| = -6$; puesto que $|A| < 0$

9. Si $A \,.\, A^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, calcula $|A| < 0$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Calcula $|M_{11}| + |M_{23}| + |M_{31}|$

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Calcula $A_{21} + A_{31} + A_{13}$

UNI

12. Calcula el det(A); si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & -4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

usando el teorema de Laplace

Resolución:

Elegimos la primera fila.

$$\Rightarrow |A| = 2\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$|A| = 2(-4) + (2 - 15) + 5(-12)$

$|A| = -8 - 13 - 60$

$|A| = -81$

13. Calcula el determinante de $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

usando el teorema de Laplace.

14. Calcula el determinante

$A = \begin{pmatrix} a & o & c & o \\ o & a & o & c \\ b & o & d & o \\ o & b & o & d \end{pmatrix}$