CLASIFICACIÓN Y OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo Z es aquel que está formado por la unión de una parte real y otra imaginaria, Su representación es la siguiente:

$$\underbrace{a}_{\text{Parte real}} \qquad Z = a + bi \qquad \underbrace{bi}_{\text{Parte imaginaria}}$$

Números complejos especiales

Considerando el número complejo $Z = a + bi$, tenemos:

A) Complejo real

Es aquel cuya parte imaginaria es nula $(b = 0)$

B) Complejo puro

Es aquel cuya parte real es nula $(a = 0)$

C) Complejo nulo

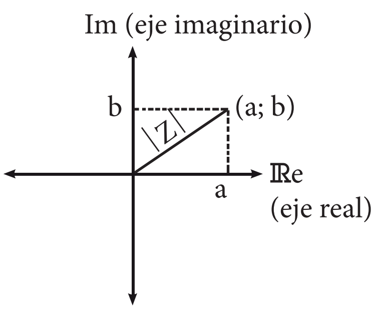
Es aquel cuya parte real y parte imaginaria son nulas $(a = 0; b = 0)$

Representación gráfica de un complejo

Forma cartesiana de un complejo:

→ Forma binómica: $Z = a + bi$

→ Forma cartesiana: $Z = (a, b)$



→ Módulo: $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Clasificación

A) Complejos iguales

Dos complejos son iguales si tiene sus partes reales y sus partes imaginarias iguales.

Si $a + bi = c + di \Rightarrow a = c \wedge b = d$.

B) Complejos conjugados

Son aquellos que tienen la misma parte real, pero de signos contrarios sus partes imaginarias. Así:

Sea $Z = a + bi$

Su conjugada será $\overline{Z} = a - bi$

C) Complejos opuestos

Son aquellos que son iguales, pero de signos diferentes, tanto en su parte real como en su parte imaginaria.

Sea $Z = a + bi$

Su opuesto será: $Z^* = -a - bi$

Operaciones con números complejos

Sean: $Z = a + bi$

$W = c + di$; $Z; W \in \mathbb{C}$

Definimos las siguientes operaciones:

a) Suma

$$Z + W = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

b) Resta

$$Z - W = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

c) Multiplicación

$$Z \cdot W = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

d) División

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Potencia de números complejos

Por ahora emplearemos exponentes pequeños con el apoyo de productos notables.

- $Z = 3 - 2i$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Z^2 &= (3 - 2i)^2\\ &= 9 - 6i + 4i^2\\ &= 9 - 6i - 4\\ &= 5 - 6i\end{aligned}$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula:

$$A = 3(2 + 3i) - 5(7 - 2i) + (1 + i)^2$$

2. Calcula:

$$B = 3(1 + i)^2 + 5(1 - i)^2 + (2 + i)(2 - i1)$$

3. Calcula:

$$C = (3 + i)(2 - i) + (5 - 3i)(2 + i)$$

PUCP

4. Si $\frac{3 + ai}{5 - i}$ es un complejo real, calcula «a».

Resolución:

$\Rightarrow \frac{3 + ai}{5 - i} = m$ → complejo real

$\Rightarrow 3 + ai = 5m - mi$

$\Rightarrow 3 = 5m \wedge a = -m$

$\frac{3}{5} = m \wedge a = -\frac{3}{5}$

5. Si $Z = \frac{4 + ai}{7 - 2i}$ es un complejo real, calcula «a».

6. Si $Z = \frac{2 + 3ai}{1 + i}$ es un complejo imaginario, calcula «a».

7. Si $Z_1 = (a + 3) + (b - 5)i$
$Z_2 = 2 + 4i$
son iguales, calcula «ab»

UNMSM

8. Si $Z = 3 - 2i$,
calcula:
$A = \overline{Z} \cdot Z + Z^*$

Resolución:

$A = (3 + 2i)(3 - 2i) + (-3 + 2i)$
$A = 3^2 - (2i)^2 - 3 + 2i$
$A = 13 - 3 + 2i$
$A = 10 + 2i$

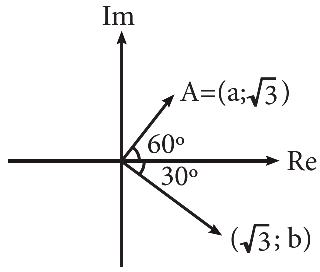
9. Si $Z = 3 + 4i$,
calcula: $A = Z \cdot \overline{Z} + Z^*$

10. Si $Z = (a + 2i)(1 - i) + (1 + i)(b - 3i)$ es un complejo nulo, calcula «ab»

11. Calcula «a·b»:
$a + 3i + 7 - bi = (3 + 2i)2 + (1 + i)(4 - 3i)$

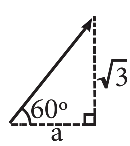
UNI

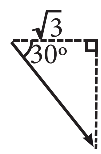
12. Sea:



Calcula: $\frac{a}{b}$

Resolución:
Construyendo el triángulo rectángulo:

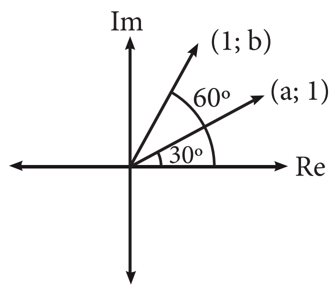


$\Rightarrow a = 1$;


$\Rightarrow b = -1$

$\therefore \frac{a}{b} = -1$

13. Sea:



Calcula: $\frac{a}{b}$

14. Si $Z = 3 + 2i$, calcula el módulo de
$A = \overline{Z} - Z^* \cdot \overline{Z} + (Z - 2)^2$