



CIRCUNFERENCIA Y PARÁBOLA

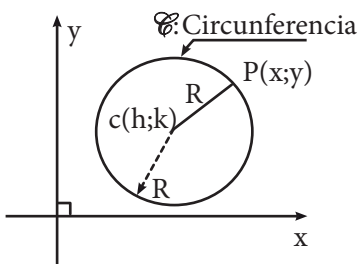
CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que están a una misma distancia de otro punto fijo del mismo plano denominado centro.

Ecuación ordinaria de la circunferencia

Sea $(P(x; y))$ un punto plano $x - y$ cuya distancia constante a otro punto fijo $C(h;k)$ es R , luego, la ecuación de la circunferencia es:

$$\mathcal{C}: (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$



En la figura:
 Centro: $C(h; k)$
 Radio: R
 Punto genérico: $P(x;y)$

Entonces por distancia entre dos puntos:

$$\mathcal{C}: (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

Ecuación ordinaria de la circunferencia,

Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia de los puntos $P(x; y)$ de centro $C(h;k)$ y cuyo radio R , está dado:
 $\mathcal{C}: (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

Desarrollando y ordenando:

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - R^2 = 0$$

haciendo: $-2h = A$, $-2k = B$ y $h^2 + k^2 - R^2 = C$

Luego:

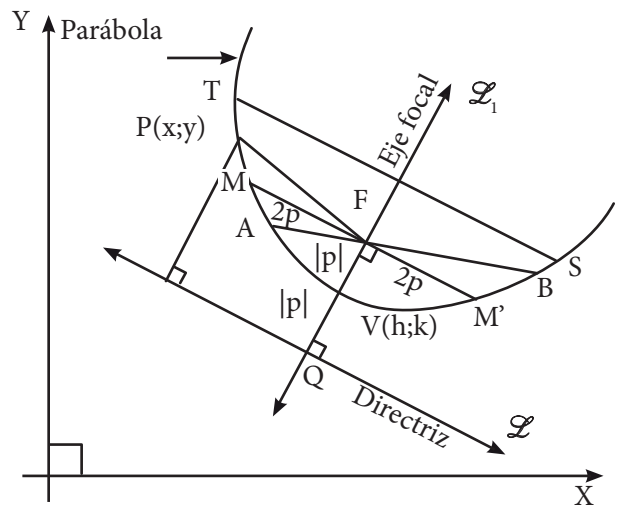
$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Ecuación general de la circunferencia.

PARÁBOLA

Dada recta fija \mathcal{L} , denominada directriz y un punto fijo F , denominado foco que no pertenece a dicha recta.

Se define la parábola, como el lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x;y)$, que equidistan del foco F y la recta \mathcal{L} .



Según la definición:

F es Punto Fijo (Foco), \mathcal{L} es la recta directriz y $P(x; y)$ es un punto cualquiera de coordenadas genéricas x e y de la parábola, luego:

$$d(P,F) = d(P, \mathcal{L}_1)$$

Por definición:

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \mathcal{L})} = e$$

Luego: $e = 1$, donde e es la excentricidad de la parábola.

Elementos asociados a la parábola

Foco : F
 Directriz : \mathcal{L}
 Eje Focal : \mathcal{L}_1

- Vértice : $V(h;k)$
- Lado recto : \overline{MN} ($MM = 4p$)
- Parámetro : p ($VF = VQ = p$)
- Cuerda Focal: \overline{AB}
- Cuerda : \overline{TS}

Formas de la ecuación de la parábola

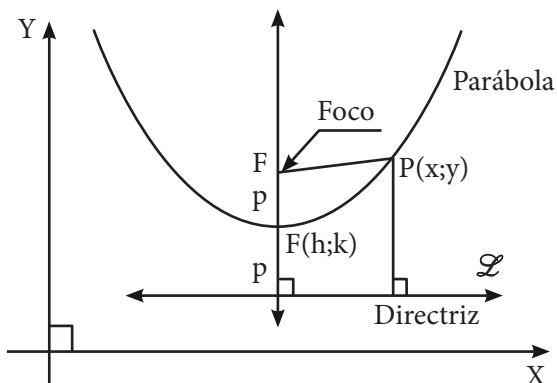
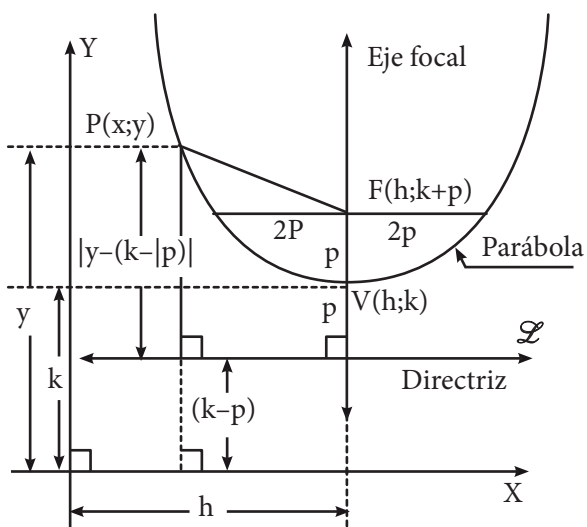
Las diversas formas de la ecuación cartesiana de una parábola, depende de la ubicación del eje focal, con respecto a los ejes coordenados.

Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje y

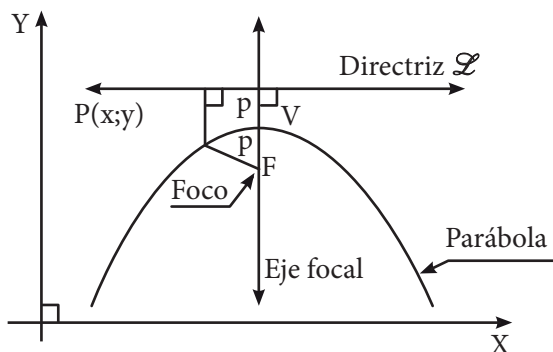
La ecuación cartesiana de la parábola cuyo vértice es $V(h; k)$ y su eje focal es paralelo al eje Y está dado por:

$$P = (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Siendo (x, y) coordenadas genéricas de un punto de la parábola, p es su parámetro.



Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

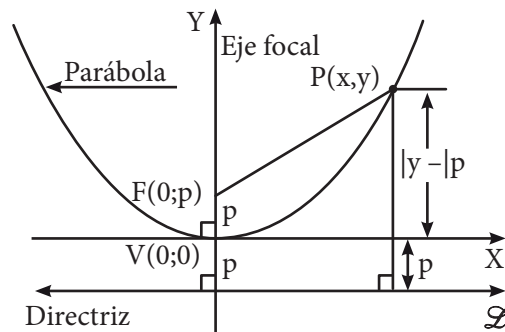


Ecuación de la parábola con el eje focal en el eje Y

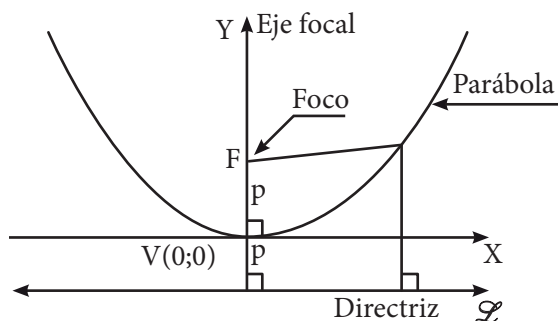
La ecuación cartesiana de la parábola cuyo vértice es $V(0; 0)$ y su eje focal en el eje y, está dado por:

$$\mathcal{P}: x^2 = 4py$$

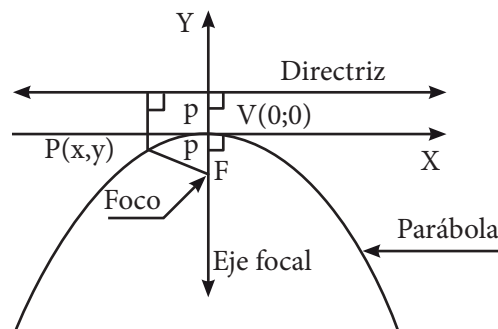
(x, y) : coordenadas del punto genérico.



Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba.



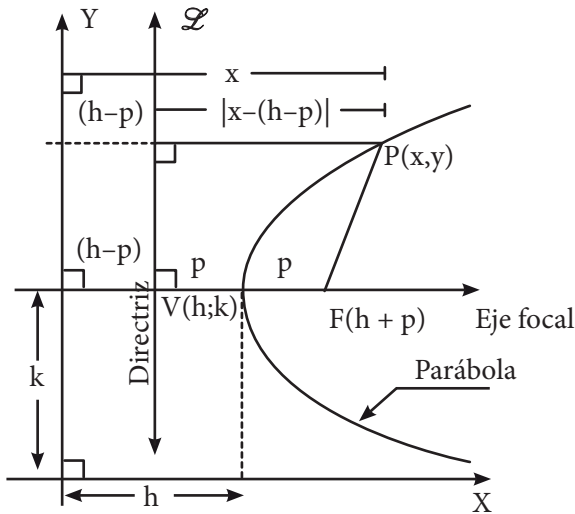
Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



Ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje X

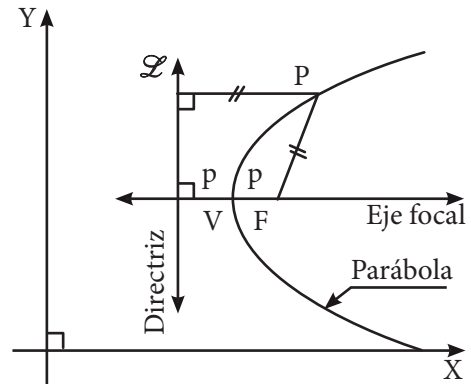
La ecuación cartesiana de la parábola cuyo vértice es $V(h; k)$ y su eje focal es paralelo al eje X, está dado por:

$$\mathcal{P} = (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

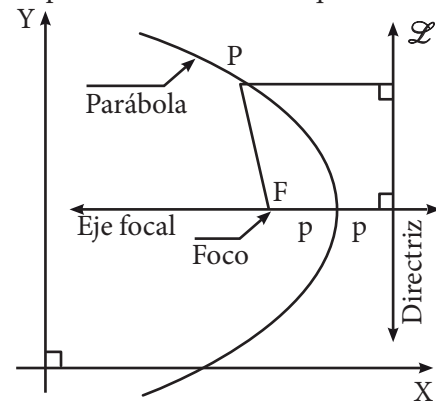


p: parámetro

Si $p > 0$, la parábola se abre a la derecha:



Si $p < 0$; la parábola se abre a la izquierda.



Trabajando en clase

Integral

- Si $\mathcal{C}(-4, 8)$ son las coordenadas del centro de una circunferencia de radio 20 u, determina la ecuación ordinaria de la circunferencia.
- Si $\mathcal{C}(-3, 2)$ son las coordenadas del centro de una circunferencia de radio 5 u, determina la ecuación general de la circunferencia.
- Si:

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$$

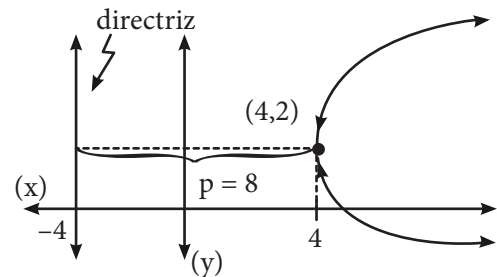
es la ecuación general de una circunferencia, calcula las coordenadas del centro y la longitud del radio.

Católica

- Si la directriz de una parábola de vértice $V(4, 2)$ es $x = -4$, determina la ecuación de la parábola.

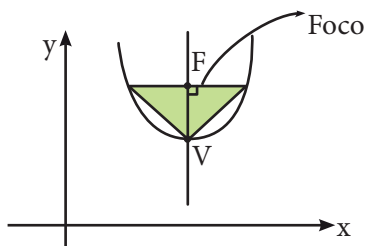
Resolución:

Graficamos de forma adecuada.



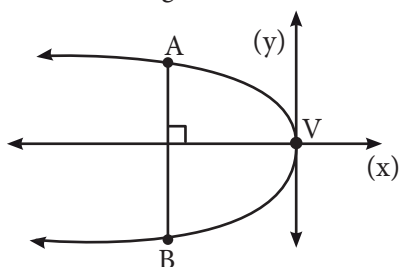
$$\Rightarrow (y - 2)^2 = 32(x - 4)$$

- Si la directriz de una parábola de vértice $V(8, -2)$ es $y = -2$. Determina la ecuación de la parábola.
- Si $V(3, -8)$ y $F(3, -7)$ son vértice y foco respectivamente, determina su ecuación de una parábola.
- Calcula el área de la región sombreada, si la ecuación de la parábola es: $P: (x - 5)^2 = 8(y - 5)$.



UNMSM

8. Determina la ecuación de la parábola si « \overline{AB} » es el lado recto de longitud 32 u.



Resolución:

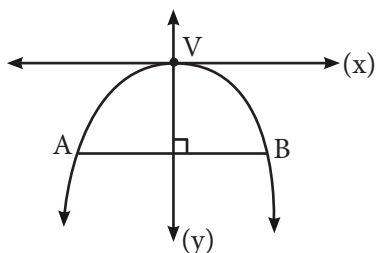
Sabemos que $AB = 4p \Rightarrow 4p = 32 \rightarrow p = 8$ y $V(0, 0)$

\Rightarrow Determinamos la ecuación

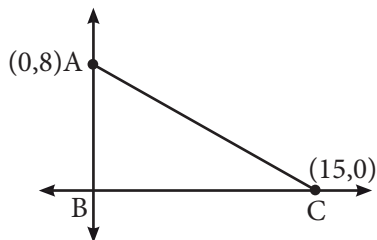
$$(y - 0)^2 = -4(8)(x - 0)$$

$$y^2 = -32x$$

9. Determina la ecuación de la parábola si \overline{AB} es el lado recto cuya longitud es 8 u.



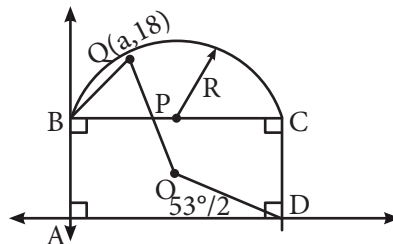
10. Determina la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



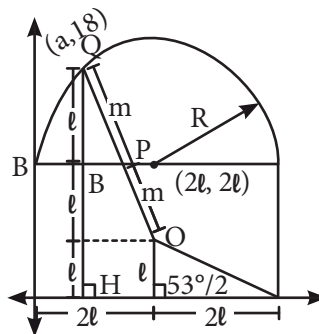
11. Si la directriz de una parábola de foco $F(5,2)$ es $y = 5$; determina la ecuación de la parábola.

UNI

12. Según la figura; si $OP = PQ$ y «O» es centro del rectángulo ABCD, calcula la ecuación de la semi-circunferencia.



Resolución:



\Rightarrow Se observa que:

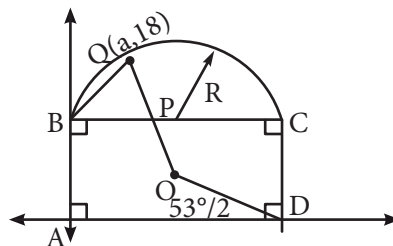
$$3l = 18 \rightarrow l = 6$$

$$\Rightarrow R = 2l = 12$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = (2l, 2l) \rightarrow \mathcal{C} = (12, 12)$$

$$\therefore (x - 12)^2 + (y - 12)^2 = 144$$

13. Según la figura, si $OP = PQ$ y «O» es el centro del rectángulo ABCD, calcula la ecuación de la semi-circunferencia.



14. En una parábola de foco F, se traza la cuerda focal \overline{BC} y se ubica el punto «A» en la región interior, tal que ABC es un triángulo equilátero. Si \overline{AB} es paralelo al eje focal y $BF = 9$; calcula «AC».