BINOMIO DE NEWTON

I. Factorial de un número

Es el resultado que se obtiene de multiplicar todos los números naturales en forma consecutiva desde la unidad hasta el número dado.

A. Notación

$$\text{Factorial de n} \begin{cases} n! \\ \lfloor n \\ n \rfloor \end{cases}$$

Ejemplo:

$3! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$

$4! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$

$x! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (x-1)x$

Donde: $x \in \mathbb{N}$

Observaciones:

1. Por convención: $0! = 1$
2. Por definición: $1! = 1$

De (1) y (2) puede concluirse que no se puede proceder:

$0! = 1! \Rightarrow 0 = 1$ (abusrdo)

B. Propiedades

1. Si $a! = b! \Rightarrow a = b, \forall\, a, b \in \mathbb{N}$
2. Si $n! = n(n-1)!, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$
3. Si $a! = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \vee \\ a = 0 \end{cases}$

II. Número combinatorio

Se define como el número total de grupos que se pueden formar con «n» elementos tomados de «k» en «k», en el cual cada grupo debe diferenciarse de otro por lo menos en un elemento.

A. Notación

$$C_k^n ;\ {}_kC^n ;\ C_{n.k}$$

Se lee: combinaciones de «n» elementos tomados de «k» en «k».

Forma matemática

Se demuestra: $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

Donde: $\{n, k\} \in \mathbb{N}, n \geq k$

B. Propiedades

1. Combinaciones complementarias

$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

Corolarios

- $C_0^n = C_n^n = 1$
- $C_k^n = C_{n-1}^n = n$

2. Suma de combinaciones de igual índice superior pero inferiores diferenciados en 1.

$$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

3. Degradación de índices
   - Ambos índices
     $C_k^n = \dfrac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$
   - Solo índice superior
     $C_k^n = \dfrac{n}{n-k} C_k^{n-1}$
   - Solo índice inferior
     $C_k^n = \dfrac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$

C. Teorema

$$C_k^n = C_p^n \Rightarrow \begin{cases} k = p \\ \vee \\ k + p = n \end{cases}$$

III. Triángulo de Pascal

Nos sirve para obtener los coeficientes del desarrollo de un binomio para exponente natural.

			1			.....	$(x+a)^0$
		1		1		.....	$(x+a)^1$
	1		2		1	.....	$(x+a)^2$
1		3		3		1	$(x+a)^3$
1	4		6		4	1	$(x+a)^4$
1	5	10		10	5	1	$(x+a)^5$

Desarrollo del binomio para exponente natural.

A. Teorema

$$\boxed{(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + \ldots + C_n^n a^n}$$

Donde:
x: primer término
a: segundo término
$n \in \mathbb{N}$

B. Forma reducida

$$\boxed{(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} a^k}$$

Ejemplo:
El desarrollo de
$(x+4)^5 = C_0^5 x^5 + C_1^5 x^4 4 + C_2^5 x^3 4^2 + C_3^5 x^2 4^3 + C_4^5 x 4^4 + C_5^5 4^5$
$(x+4)^5 = x^5 + 20x^4 + 160x^3 + 640x^2 + 1280x + 1024$

C. Propiedad

1. Término general
   - Contando de izquierda a derecha:
     $t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} a^k$
     $\rightarrow$
     Ejemplo:
     En $(2x^3 - a^4)^{15}$, calcula el término duodécimo.
     $t_{12} = t_{11+1} = C_{11}^{15}(2x^3)^{15-11}(-a^4)^{11}$
     $t_{12} = -16\, C_{11}^{15} x^{12} a^{44}$
   - Contando de derecha a izquierda:
     $t_{k+1} = C_k^n a^{n-k} x^k$
     $\leftarrow$
2. El desarrollo del binomio $(x + y)^n$ tiene $(n + 1)$ términos.
   Ejemplo: $(10x^4 + 3a)^8$ tiene 9 términos
3. Dado:
   $$P(x) = (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} a^k$$
   La suma de coeficientes de P(x) es P(1)
   $$(1+a)^n = 1 + aC_1^n + a^2C_2^n + \ldots + a^nC_n^n$$
   Cuando a = 1 se tiene:
   $$C_0^n + C_1^n + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Corolarios
Si «n» es par:
$C_1^n + C_3^n + C_5^n + \ldots + C_{n-1}^n = 2^{n-1}$
$C_2^n + C_4^n + C_6^n + \ldots + C_n^n = 2^{n-1}$
De la misma forma se cumple cuando «n» es impar.

IV. Término central

El desarrollo del binomio tendrá un único central si «n» es par, luego la posición que ocupa este término es:

$$\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

Ejemplo:
$(x^2 - 8y^3)^{10}$ tiene como término central:
$t_c = t_6 = C_5^{10}(x^2)^5(-8y^3)^5$
$t_c = t_6 = -2^{15}C_5^{10}x^{10}y^{15}$

Nota:
La suma de coeficiente de $(x + y)^n$ se obtiene reemplazando x = 1, y = 1.
Así, suma de coeficientes:
$$(1+1)^n = 2^n$$

Trabajando en clase

Integral

1. Calcula: $A = \dfrac{12! + 13! + 14!}{12! + 13!}$

2. Si: $C_x^{15} = C_{x+3}^{15}$, calcula $3x - 5$.

3. Hallar el valor de «x»: $(x + 1)! = x! + 7!x$

Católica

4. Calcula:
$$B = \frac{C_{16}^{27} + C_{11}^{27}}{C_9^{24} + C_{14}^{24} + C_{14}^{25} + C_{10}^{26}}$$

Resolución:

Por propiedad: $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

También:
$$C_k^n = C_{n-k}^n$$

Entonces:
$$B = \frac{C_{16}^{27} + C_{16}^{27}}{C_{15}^{24} + C_{14}^{24} + C_{14}^{25} + C_{10}^{26}}$$
$$B = \frac{2C_{16}^{27}}{C_{15}^{24} + C_{14}^{24} + C_{10}^{26}}$$

$$B = \frac{2C_{16}^{27}}{C_{15}^{26} + C_{16}^{26}} = \frac{2\cancel{C_{16}^{27}}}{\cancel{C_{16}^{27}}}$$

$\therefore B = 2$

Rpta.: 2

5. Calcula:

$$D = \frac{C_{18}^{35} + C_{17}^{35} + C_{17}^{36} + C_{19}^{37} + C_{20}^{39}}{C_{20}^{39} + C_{19}^{39}}$$

6. Calcula:

$$B = \left(\frac{18! + 19!}{20!}\right)\left(\frac{39!}{37! + 38!}\right)$$

7. Si $\frac{10!}{a!\,b!} = 42$. Calcula «ab».

UNMSM

8. Calcula el quinto término del desarrollo de $A = (x^3 + y^2)^7$

Resolución

Sea: $n = 7$; $k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4$

Aplicando la fórmula

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} y^k$$

$$t_{4+1} = C_4^7 (x^3)^{7-4} (y^2)^4$$

$$t_5 = \frac{7!}{3!\,4!}(x^3)^3(y^2)^4$$

$$t_5 = \frac{7 \,.\, \cancel{6} \,.\, 5 \,.\, \cancel{4!}}{\cancel{3} \,.\, 2 \,.\, \cancel{4!}}\, x^9 y^8$$

$\therefore t_5 = 35x^9y^8$

Rpta.: $35x^9y^8$

9. Calcula el sexto término del desarrollo de $A = (x^4 + y^3)^8$.

10. Determina el grado del décimo tercer término del desarrollo de $(x^2 + y^3)^{18}$.

11. Determina el segundo término del desarrollo de $(3x^2 - 5y^3)^{n-2}$, si se sabe que presenta 256 términos.

UNI

12. Calcula el término independiente de «x» en el desarrollo de $\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^5$.

Resolución

$$t_{k+1} = C_k^5 (2x^2)^{5-k}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^k$$

$$t_{k+1} = C_k^5\, 2^{5-k} \,.\, x^{10-2k} \,.\, \frac{(-1)^k}{x^{3k}}$$

$$t_{k+1} = (-1)^k \,.\, 2^{5-k} \,.\, C_k^5\, x^{10-5k}$$

Entonces el exponente de «x», necesariamente debe ser igual cero; es decir:

$10 - 5k = 0 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

Reemp. «k» para obtener el término independ.

$$(-1)^2 \,.\, 2^{5-2} \,.\, C_2^5 = 1 \,.\, 2^3 \,.\, \frac{5 \,.\, \overset{2}{\cancel{4}} \,.\, \cancel{3!}}{\cancel{2!}\,\cancel{3!}}$$

$\therefore$ El término independiente: 80

Rpta.: 80

13. Calcula el término independiente de «x» en $\left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$.

14. Determina «n» en el desarrollo del binomio: $(5x^2 - 3y^4)^n$. Si el grado del cuarto término es 24, además indica el término central.